Subject: Date:

«بسمه تعالی»

«ایستایی ۱»

استاد: خانم علیزاده

هنرجو: شمیم تقی‌زاده

دانشگاه: فرسه ساری

ترم ۳ / نقشه‌کشی معماری

مباحث:

۱) اصل علم معاش
۲) استاتیک ذرات
۳) گشتاور یک نیرو حول یک نقطه
۴) تعادل اجسام
۵) خرپا
۶) مرکز سطوح، مرکز ثقل و ممان اینرسی
۷) تیرها

«پاییز ۱۳۹۳»

MICRO®

(جلسه‌ی اول)

فصل ۱ : اصول علم مکانیک

- مکانیک علمی است که شرایط سکون یا حرکت اجسام را تحت تاثیر نیروها توصیف یا پیش‌بینی می‌کند.

مکانیک به سه بخش تقسیم می‌شود : ۱- مکانیک اجسام صلب
۲- " " تغییر پذیر
۳- " سیالات

- مکانیک اجسام صلب : ۱- استاتیک
۲- دینامیک

- مفاهیم بنیادی در علم مکانیک شامل موارد زیر است :

۱- فضا : به مکان یک نقطه مربوط می‌شود. مکان یک نقطه را با ۳ طولی که از یک نقطه مرجع به نام مبدأ که در ۳ جهت معین اندازه گیری می‌شود، می‌توان مشخص کرد. که این طول‌ها را **مختصات** نقطه می‌نامند.

۲- زمان : برای تعریف یک رویداد تنها مکان آن در فضا کافی نیست لحظه زمان وقوع آن را نیز باید مشخص کرد.

۳- جرم : برای توصیف اجسام و مقایسه‌ی آن‌ها با هم بر مبنای برخی از خاصیت‌ها به کار می‌رود.

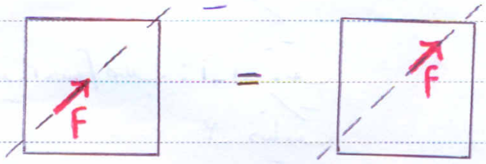
۴- نیرو : کشش جسمی را بر جسم دیگر نشان می‌دهد. نیرو با نقطه‌ی اثر، مقدار و جهت مشخص و با بردار نشان داده می‌شود.

مفاهیم مقدماتی :

- در ایستایی ۴ اصل آزمایشی زیر مطالعه می‌شود :

۱- قانون متوازی الاضلاع جمع نیروها : طبق این قانون دو نیروی وارد بر ذره را با یک نیروی معادل با (برآیند می‌توان جایگزین کرد.

۲- اصل انتقال پذیری : طبق این اصل اثر نیروی وارد بر نقطه ای از جسم صلب را با نیروی به همان مقدار، جهت و خط اثر نیروی قبل را دارد ، ولی در نقطه ی دیگری از جسم وارد می‌شود ، جایگزین کنیم ، شرایط تعادل یا حرکت جسم تغییری نمی‌کند .



۳- قانون اول نیوتون : اگر نیروی برآیند وارده بر ذره ای صفر باشد ، ذره ساکن است .
یا با تندی (سرعت) ثابتی در امتداد یک خط حرکت می‌کند .

۴- قانون دوم نیوتون : اگر نیروی برآیند وارده بر ذره ای صفر نباشد ، ذره شتابی متناسب با نیروی برآیند و در جهت آن خواهد داشت .

$$\boxed{(N)\ \text{نیرو} \leftarrow F = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جرم}\ (kg)}}{m}a \rightarrow \text{شتاب}\ (m/s^2) \quad / \quad a = \frac{\Delta V}{t}}$$

یادآوری :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0 \xrightarrow{5m} P \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \text{سرعت}\ V = \dfrac{\Delta x}{t} = \dfrac{5}{5} = 1\ m/s \\ \text{شتاب}\ a = \dfrac{\Delta V}{t} \end{cases}$$

$$V = \frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان}} \Rightarrow \frac{\Delta x}{t} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 6 \Rightarrow \frac{10-4}{2-1} = \frac{6}{1} = 6\ m/s$$

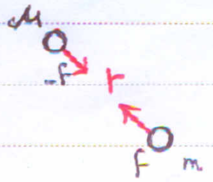
داده مسئله

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \ \begin{matrix} x = 4m \\ t = 1s \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ \vdots \end{bmatrix} \ \begin{matrix} x = 10m \\ t = 2s \end{matrix}$$

۵- قانون سوم نیوتون: نیروهای کنش و واکنش اجسامی که باهم تماس دارند دارای مقداری برابر، خط اثر یکسان و در سوی مخالف اند.

۶- قانون (۴) گرانش نیوتون: طبق این قانون دو ذره به جرم m و M با نیروهای برابر و باهم سوی F و F- یکدیگر را می‌ربایند، مقدار F از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$F = \frac{\underset{\text{(ثابت عمومی گرانش)}}{G}\,\overset{\text{(جرم ۱)}}{M}\,m \rightarrow \text{(جرم ۲)}}{r^2 \rightarrow \text{(فاصله‌ی بین دو جسم)}}$$



«تبدیل واحدها»

mile = ۱۷۶۰ yard
yard = ۳ ft
ft (فوت) = ۱۲ in = ۳۰٫۴۸ cm
in (اینچ) = ۲٫۵۴ cm
Lb (پوند) = ۴٫۴۵ N
kLb = ۱۰۰۰ Lb

«ضرایب پیشوندی»

T (ترا) = 10^{12}	k (کیلو) * = 10^{3}	d (دسی) * = 10^{-1}	μ (میکرو) * = 10^{-6}
G (گیگا) = 10^{9}	H (هکتو) = 10^{2}	c (سانتی) * = 10^{-2}	n (نانو) = 10^{-10}
M (مگا) = 10^{6}	dq (دکا) = 10^{1}	m (میلی) * = 10^{-3}	p (پیکو) = 10^{-12}

مثال :

$cm = ۱۰^{-۲} m \Rightarrow ۰٫۰۱ m$

$m = ۱۰۰ cm$

$mm = ۰٫۰۰۱ \Rightarrow ۱۰^{-۳} m$

مثال : ۱۰ m/s چند اینچ بر ثانیه و چند فوت بر ثانیه است ؟

الف) $۱۰ \frac{m}{s} \rightarrow \frac{in}{s} = ?$ $\Rightarrow$ $۱ in \rightarrow ۲٫۵۴ cm$

$۱ cm \rightarrow ۱۰^{-۲} m$

$۱۰ m/s \Rightarrow \frac{۱۰ \times ۱۰۰}{۲٫۵۴} = ۳۹۳٫۷ \; in/s$

ب) $\frac{ft}{s}$? $\Rightarrow$ $۱ ft \rightarrow ۳۰٫۴۸ cm$

$۱۰ m \rightarrow ۱۰۰۰ cm$

$۱۰ m/s \Rightarrow \frac{۱۰۰۰}{۳۰٫۴۸} = ۳۲٫۸۰ \; \frac{ft}{s}$

تمرین (۱-۱)

۱-۱) ۱۵۰N چند Lb و چند KLb است ؟

$\frac{۱ \; Lb \;\; ۴٫۴۵ \; N}{x \;\;\; ۱۵۰ \; N} = \frac{۱ \times ۱۵۰}{۴٫۴۵} = ۳۳٫۷۰ \; Lb$

$\frac{۱ \; Klb \;\; ۱۰۰۰ \; Lb}{x \;\;\; ۳۳٫۷۰ \; Lb} = \frac{[illegible]}{۳۳٫۷۰} = ۲۹٫۶۷ \; Klb$

۱-۲) ۲۰۰ mile چند yard و چند cm است ؟

$\frac{۱ \; mile \;\; ۱۷۶۰ \; yard}{۲۰۰ \;\;\; x} = ۲۰۰ \times ۱۷۶۰ = ۳۵۲۰۰۰ \; yard$

$\frac{۱ \; yard \;\; ۳ \; ft}{۳۵۲۰۰۰ \;\;\; x} = ۱۱۷۳۳۳٫۳ \; ft$ → $\frac{۱ \; ft \;\; ۳۰٫۴۸ \; cm}{x} = ۳۵۷۶۳۱۸٫۹۸ \; cm$

۱-۳) ۵۰۰ N.m چند Km.m و چند Lb.in است ؟

N → lb

۱ m → in

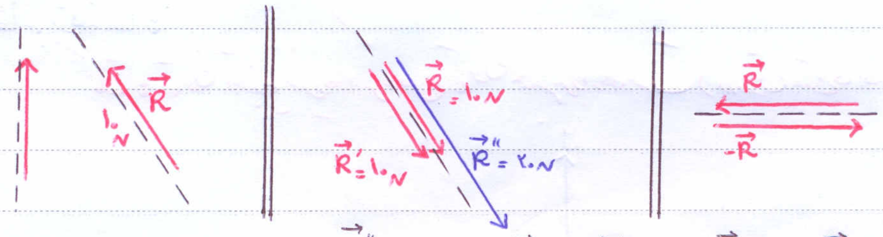
$۵۰۰ \times \frac{۱}{۴٫۴۵} \times ۱۰۰ \times \frac{۱}{۲٫۵۴} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰۰}{۴٫۴۵ \times ۲٫۵۴} = ۴۴۲۳٫۶$

(جلسه دوم)

فصل دوم ۲: استاتیک ذرات

۱_ **بردارها:** بردار کمیتی است که راستا، جهت و اندازه دارد مانند جابه‌جایی، شتاب، سرعت و...

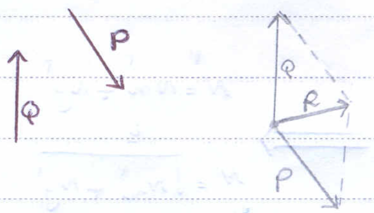
کمیت اسکالر کمیتی است که راستا و جهت ندارند اما اندازه دارند، انرژی، کار...



$$\vec{R}'' = 20N = 2\vec{R} = 2\vec{R}' \qquad \vec{R} + (-\vec{R}) = 0$$

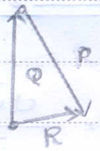
(نکته: زمانی می‌توان دو بردار را جمع جبری کرد که راستای حرکت آن‌ها برابر باشد.)

۲_ جمع بردارها: (در صورتی که هم‌راستا نباشند)



۱_ قانون متوازی‌الاضلاع:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

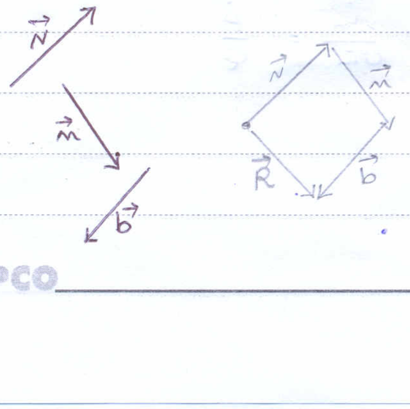


۲_ قانون مثلث:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

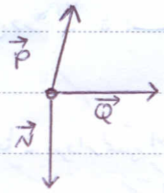
(نکته: جمع برداری خاصیت جابه‌جایی دارد ⇐ $\vec{P}+\vec{Q} = \vec{Q}+\vec{P}$)

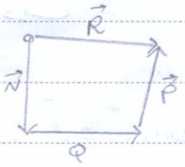
۳_ قانون چند وجهی جمع مثلث‌ها:



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{m} + \vec{b}$$

۴_ برآیند نیروهای متقاطع :

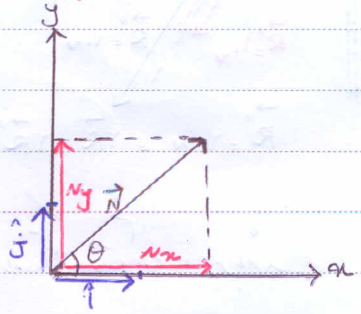




$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{Q} + \vec{P}$$

تجزیه نیروها به مؤلفه ها :

نکته : قانون تجزیه نیروها برعکس قانون جمع بردارهاست (در روش متوازی الاضلاع)



$$\vec{N} \Rightarrow \vec{N_x}\,\hat{i} + \vec{N_y}\,\hat{j}$$

بردار $N_x = N\cos\theta = \frac{N_x}{N} \Rightarrow N_x = N\cos\theta$

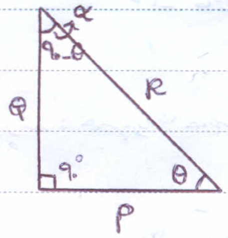
،، $N_y = N\sin\theta = \frac{N_y}{N} \Rightarrow N_y = N\sin\theta$

$\Longrightarrow$ $N^۲ = N_x^۲ + N_y^۲$

یا

$N = \sqrt{N_x^۲ + N_y^۲}$

یادآوری :



$\alpha = ۱۸۰ - (۹۰ + \theta)$

$\alpha = ۹۰ - \theta$

فیثاغورث $\Rightarrow R^۲ = P^۲ + Q^۲$

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{Q}{R}$

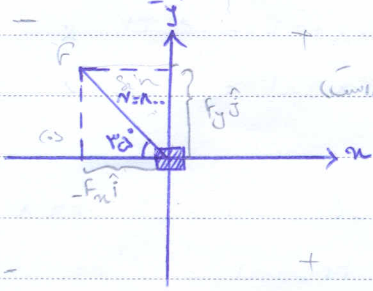
$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{P}{R}$

$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{Q}{P}$

$\cot\mathrm{an}\,\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{P}{Q}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: نیروی ۸۰۰N مطابق شکل بر ذره‌ای وارد می‌شود، مؤلفه‌های افقی و قائم آن نیرو را بیابید:



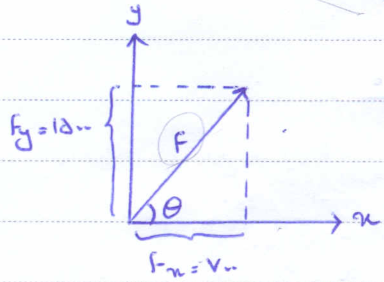
(چون به سمت منفی است) $-F_x = F\cos\theta \Rightarrow ۸۰۰ \times \cos ۳۵^\circ = -۶۵۵$

$F_y = F\sin\theta \Rightarrow ۸۰۰ \times \sin ۳۵^\circ = ۴۵۹$

$\vec F = \vec F_x\hat i + \vec F_y\hat j \Rightarrow F = -۶۵۵\hat i + ۴۵۹\hat j$

(نکته: هرگاه θ در هر نقطه‌ای قرار بگیرد با قاعده‌ی مثلث تشکیل شده cosθ خواهد بود.)

مثال: نیروی $\vec F = ۷۰۰\hat i + ۱۵۰۰\hat j$ بر ذره‌ای وارد شده است. مقدار این نیرو و زاویه‌ی آن را با افق بدست آورید.



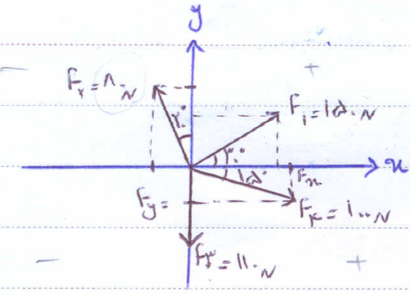
$F = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \Rightarrow \sqrt{۷۰۰^۲ + ۱۵۰۰^۲} = \cancel{۱۶۵۵},۲۲ = ۲۷۴۰....$

$\theta \Rightarrow \tan\theta \Rightarrow \frac{۱۵۰۰}{۷۰۰} = ۲,۱۴۲$

$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\,\theta \Rightarrow \cancel{۷۲,۱۹}\quad ۶۴,۹۷$

(نکته: همیشه در حالت برای بدست آوردن زاویه Arc را مورد نظر قرار می‌دهیم.)

مثال: برآیند نیروهای زیر را بدست آورید:



$\vec R_x\hat i + \vec R_y\hat j$

$\Rightarrow \vec R = ۱۹۹\hat i + ۲۳۵\hat j$

$F_۱ \Rightarrow \begin{cases} F_{x_۱} = F_۱\cos ۳۰^\circ = ۱۵۰ \times \cos ۳۰^\circ = ۱۲۹ \\ F_{y_۱} = F_۱ \sin ۳۰^\circ = ۱۵۰ \times \sin ۳۰^\circ = ۷۵ \end{cases}$

$F_۲ \begin{cases} F_{x_۲} = -F_۲ \sin ۲۰ = -۸۰ \times \sin ۲۰ = -۲۷ \\ F_{y_۲} = F_۲ \cos ۲۰ = +۸۰ \times \cos ۲۰ = ۷۵ \end{cases}$

$F_۴ \begin{cases} F_{x} = F_{x_۴} \times \cos ۱۵ = ۱۰۰ \times \cos ۱۵^\circ = ۹۹ \\ F_{y_۴} = -F_{y_۴} \times \sin ۱۵ = -۱۰۰ \times \sin ۱۵^\circ = -۲۵ \end{cases}$

$\Rightarrow \vec R_x = F_{x_۱} + F_{x_۲} + \cancel{F_{x_۳}} + F_{x_۴}$

$R_x = ۱۲۹ + (-۲۷) + ۰ + ۹۹ = \underline{۱۹۹}$

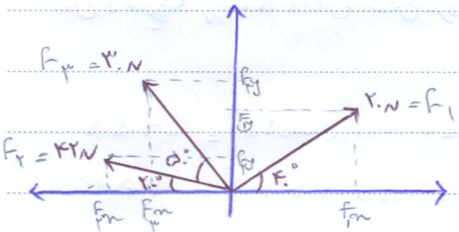
$\Rightarrow \vec R_y = F_{y_۱} + F_{y_۲} + F_{y_۳} + F_{y_۴}$

$R_y = ۷۵ + ۷۵ + ۱۱۰ + (-۲۵) = \underline{۲۳۵}$

$R_x\hat i + R_y\hat j = ۱۹۹\hat i + ۲۳۵\hat j$

PAPCO

تمرین : برآیند نیروهای زیر را بدست آورید.


$F_۳ = ۳۰N$
$F_{۳y}$
$۲۰N = F_۱$
$F_{۱y}$
$F_۲ = ۴۲N$
۵۰°
$F_{۲y}$
۲۰°
۴۰°
$F_{۲x}$
$F_{۳x}$
$F_{۱x}$

$F_{۱x} = F_۱ \cos ۴۰ = ۲۰ \times \cos ۴۰ = ۱۵,۳۲$ ×

$F_{۱y} = F_۱ \sin ۴۰ = ۲۰ \times \sin ۴۰ = ۱۲,۸۵$ ✓

$F_{۲x} = -F_۲ \cos ۲۰ = -۴۲ \times \cos ۲۰ = -۳۹,۴۴$ ×

$F_{۲y} = F_۲ \sin ۲۰ = ۴۲ \times \sin ۲۰ = ۱۴,۳۴$ ✓

$F_{۳x} = F_۳ \cos ۷۰ = -۳۰ \times \cos ۷۰ = -۱۰,۲۶$ ×

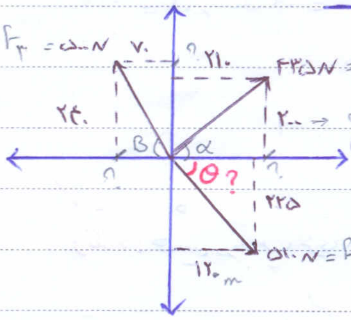
$F_{۳y} = F_۳ \sin ۷۰ = ۳۰ \times \sin ۷۰ = ۲۸,۱۹$ ✓

برآیند

$R_x = ۱۵,۳۲ + (-۳۹,۴۴) + (-۱۰,۲۶)$
$= -۳۴,۴$

$R_y = ۱۲,۸۵ + ۱۴,۳۴ + ۲۸,۱۹ =$
$= ۵۵,۴$

$R = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = -۳۴,۴ \hat{i} + ۵۵.۴ \hat{j}$


$F_۳ = ۵۰۰N$
۷۰
۲۱۰
$۴۳۵N = F_۱$
۲۴۰
۲۰۰
β
α
θ ?
۲۲۵
$۵۱۰N = F_۲$
۱۲۰_m

(اول نسبت مقدار طول‌ها / در راستای [illegible] و عمود است)

* [illegible] Arc [illegible]

$(F_۱)\ \alpha = \arctan\left(\frac{۲۰۰}{۲۱۰}\right) = ۴۳,۴°$

$(F_۳)\ \beta = \arctan\left(\frac{۲۴۰}{۷۰}\right) = ۷۳,۷°$

$(F_۲)\ \theta = \arctan\left(\frac{۲۲۵}{۱۲۰}\right) = ۶۱,۹°$

$F_{۱x} = F_۱ \cos ۴۳,۴ = ۴۳۵ \times \cos ۴۳,۴ = ۳۱۵,۰۱$ ×

$F_{۱y} = F_۱ \sin ۴۳,۴ = ۴۳۵ \times \sin ۴۳,۴ = ۲۹۹,۹۸$ ✓

$F_{۲x} = F_۲ \cos ۶۱,۹ = ۵۱۰ \times \cos ۶۱,۹ = ۲۴۰,۲۱$ ×

$F_{۲y} = -F_۲ \sin ۶۱,۹ = -۵۱۰ \times \sin ۶۱,۹ = -۴۴۹,۸۸$ ✓

$F_{۳x} = -F_۳ \cos ۷۳,۷ = -۵۰۰ \times \cos ۷۳,۷ = -۱۴۰,۳۳$ ×

$F_{۳y} = F_۳ \sin ۷۳,۷ = ۵۰۰ \times \sin ۷۳,۷ = ۴۹۷,۹$ ✓

$R_x = ۳۱۵,۰۱ + ۲۴۰,۲۱ + (-۱۴۰,۳۳) = ۴۱۴,۸۹$

$R_y = ۲۹۹,۹۸ - ۴۴۹,۸۸ + ۴۹۷,۹ = ۳۴۸$

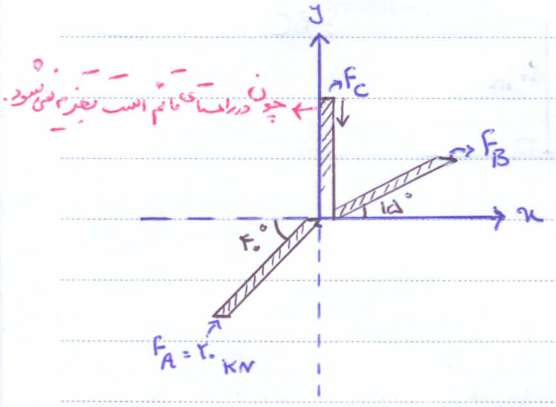
$R = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = ۴۱۴ \hat{i} + ۳۴۸ \hat{j}$

" فصل دوم "

تعادل ذره : برآیند نیروها همه در راستای صفر باید باشد .

$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \end{cases} \longrightarrow \text{تعادل}$$

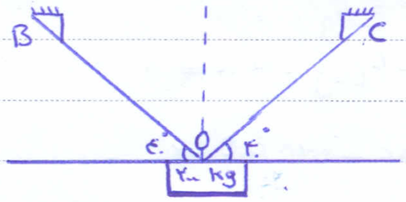
مثال : نیروهای F_B و F_C را بیابید به طوری که ذره در تعادل باشد .

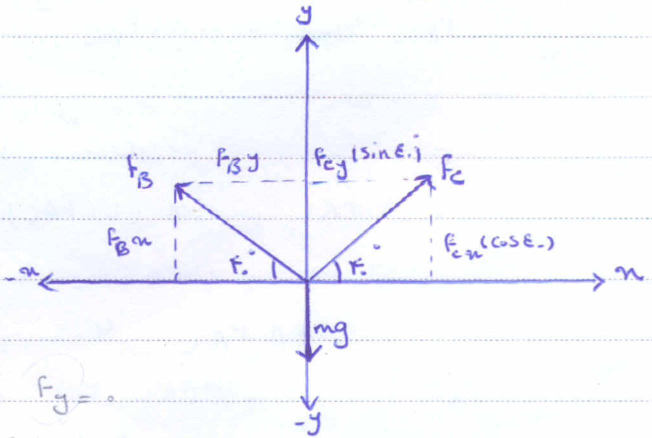

y
x
F_C
F_B
۱۵°
۴۰°
$F_A = ۲۰ \ KN$
چون در راستای قائم است تجزیه نمی‌شود.

* همه‌ی نیروهایی که به سمت پایین و چپ وارد می‌شوند منفی است و بالعکس ، برای مثبت و منفی بودن به جهت وارد شدن نیرو نگاه می‌کنیم *

* در بردار علامت منفی را با جهت بردار نشان می‌دهیم ، در معادلات با علامت منفی مثبت عبارت مربوطه *

مثال : نیروهای کشش نخ را بدست آورید .


B
C
۴۰°
۴۰°
۲۰۰ kg


y
-y
x
-x
F_B
F_C
F_{By}
$F_{Cy} (\sin ۴۰)$
F_{Bx}
$F_{Cx} (\cos ۴۰)$
۴۰°
۴۰°
mg

$F_x = ۰$

$$\begin{cases} F_{Cx} - F_{Bx} = ۰ \\ F_C \cos ۴۰ - F_B \cos ۴۰ = ۰ \\ F_C \cos ۴۰ = F_B \cos ۴۰ \end{cases}$$

$\Longrightarrow F_C = F_B$

$F_y = ۰$

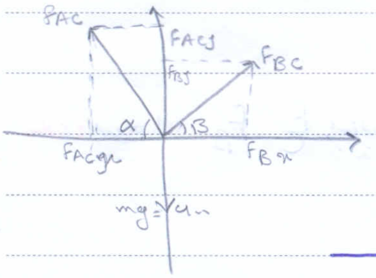
$$\begin{cases} F_{Cy} + F_{Cy} - mg = ۰ \\ F_C \sin ۴۰ + F_B \sin ۴۰ - (۲۰۰ \times ۱۰) = ۰ \\ F_B = F_C \Rightarrow ۱٫۵۲ \ N \quad ? \end{cases}$$

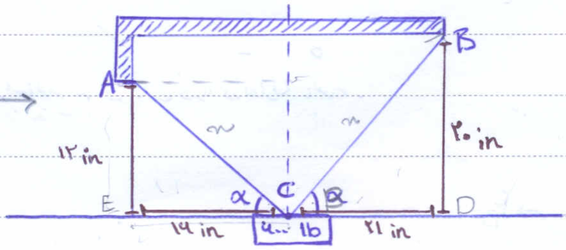
Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

تمرین: دو کابل در نقطه‌ی C به هم متصل اند و مطابق شکل، بارگذاری شده‌اند، مطلوب است:

الف) کشش کابل AC ؟

ب) " " BC ؟





$\alpha = \text{Arctan}\ \frac{۱۲}{۱۶} = ۳۶٫۸۶^\circ$

$\beta = \text{Arctan}\ \frac{۲۰}{۲۱} = ۴۳٫۵۳^\circ$

$F_{BCx} = F_{BCx} \times \cos(\overset{۰٫۷۲}{\cancel{۴۳٫۵۳}}) = F_B \times ۰٫۷۲$

$F_{ACx} = -F_{ACx} \times \cos(\overset{۰٫۸}{\cancel{۳۶٫۸۶}}) = -F_{AC} \times ۰٫۸$

$I = F_{BCx} - F_{ACx} = ۰,$

$\Rightarrow ۰٫۷۲\, F_{BC} - ۰٫۸\, F_{AC} = ۰$

$F_{BC} = \frac{۰٫۸}{۰٫۷۲} \times F_{AC} = ۱٫۱\, F_{AC}$

$F_{BCy} = F_{BC} \sin\beta = ۰٫۶۸\, F_{BC}$

$F_{ACy} = F_{AC} \sin\alpha = ۰٫۵۹\, F_{AC}$

$II = \Sigma F_y = ۰$

$\Rightarrow F_{ACy} + F_{BCy} - ۶۰۰ = ۰$

$۰٫۵۹\, F_{AC} + ۰٫۶۸\, F_{BC} - ۶۰۰ = ۰$

* از معادله‌ی قبلی $F_{BC} = ۱٫۱\, F_{AC}$ را جانشین می‌کنیم.

???

$۰٫۵۹\, F_{AC} + ۰٫۶۸\,(۱٫۱\, F_{AC}) - ۶۰۰ = ۰$

$۰٫۵۹\, F_{AC} + ۰٫۷۴۸\, F_{AC} - ۶۰۰ = ۰$

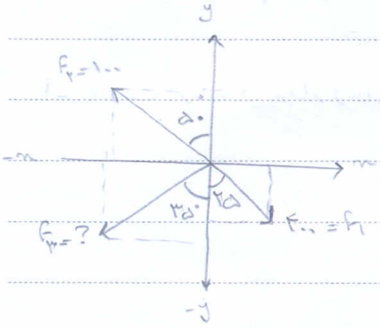
$۱٫۳۳۸\, F_{AC} = ۶۰۰$

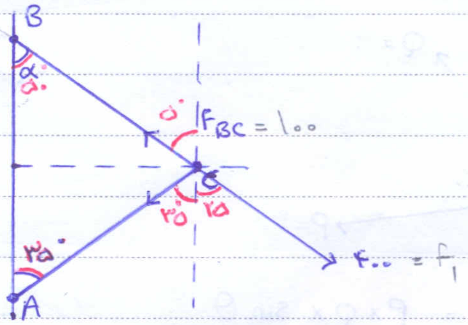
$F_{AC} = \frac{۶۰۰}{۱٫۳۳۸} = ۴۴۸٫۴۳ \Rightarrow F_{BC} = ۱٫۱\, F_{AC}$

$\Rightarrow ۱٫۱ \times ۴۴۸٫۴۳$

$\Rightarrow ۴۹۳٫۲۷۳\ \text{lb}$

تمرین ۵: اگر $\alpha = ۵۰°$ و نیروهای وارده از بازوی AC بر پین C در امتداد خط AC باشد، مطلوب است:


y
$F_۲ = ۱۰۰$
۵۰°
x
-x
۳۵°
۲۵
$F_۳ = ?$
$۴۰۰ = F_۱$
-y


B
α
۵۰°
۵۰°
$F_{BC} = ۱۰۰$
C
۳۵°
۲۵
$۴۰۰ = F_۱$
۳۵°
A

الف) مقدار نیروی AC :

ب) " " BC :

$F_۱ y = -F_۱ \cos ۲۵ = -۴۰۰ \times \cos ۲۵° = -۳۶۰$ —

$F_۱ x = F_۱ \sin ۲۵ = ۴۰۰ \times \sin ۲۵° = ۱۶۸$ +

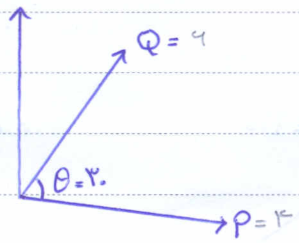
$F_۲ y = F_۲ \cos ۵۰ = ۱۰۰ \times \cos ۵۰° = ۶۴$ —

$F_۲ x = F_۲ \sin ۵۰ = ۱۰۰ \times \sin ۵۰° = ۷۶$ +

$F_۳ y = F$

فصل سوم: سیستم‌های نیروهای هم‌ارز

۱- ضرب برداری دو بردار (خارجی):



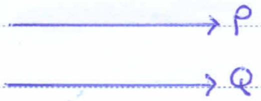
$V = P \times Q = P \times Q \times \sin\theta \overset{\text{مثال}}{\Rightarrow} ۴ \times ۶ \times \sin ۶۰ = ۱۲ \odot$

$P \times Q = -(Q \times P)$

* ⊙ داخل و مثبت / ⊗ بیرون و منفی *

← حاصل ضرب برداری دو برداری است که بر صفحه‌ی شامل آن دو بردار عمود بوده و مقدار آن برابر با حاصل ضرب در سینوس زاویه بین آن‌هاست و جهت آن از قاعده‌ی دست راست پیروی می‌کند.

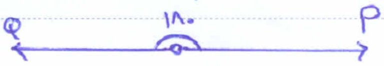
* اگر دو بردار موازی هم جهت و در جهت مخالف (۱۸۰) باشند، حاصل ضرب برداری آن‌ها صفر است.



$P \times Q = 0$

$\theta = 0$

$P \times Q = P \times Q \times \sin\theta^{\circ} = 0$



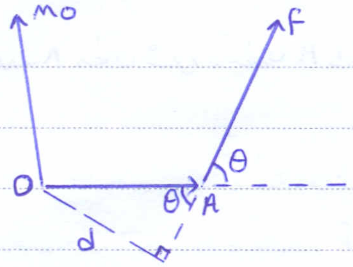
$P \times Q = 0$

$\theta = 180^{\circ}$

$P \times Q = P \times Q \times \sin 180 = 0$

«فصل سوم»

۲- گشتاور یک نیرو حول یک نقطه:



* گشتاور = ممان = لنگر *

M := moment

$$\boxed{M_O = \vec{r} \times F = r \times F \times \sin\theta}$$

یا

$$\left(\left(M_o = d \times F = r \cdot F \cdot \sin\theta\right)\right)$$

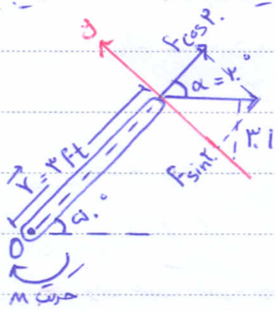
* سینوس و کسینوس زوایای مکمل $(\theta + \theta = 180)$، باهم برابرند و همچنین

" " " متمم $(\sin\theta + \cos\theta = 90)$، باهم برابرند. *

گشتاور نیروی F حول نقطه‌ی O را به صورت ضرب برداری $\vec{r}$ و F تعریف می‌کنند، گشتاور M بر صفحه‌ی شامل $\vec{r}$, F عمود می‌باشد.

لنگر تمایل به دوران جسم توسط نیرو حول یک نقطه را دارد، مقدار آن به مقدار F و فاصله‌ی عمودی نیرو تا d نقطه‌ی مورد نظر O بستگی دارد.

مثال: نیروی ۳۰ lb مطابق شکل بر انتهای بازویی به طول ۳ ft وارد می‌شود، لنگر این نیرو را نسبت به نقطه‌ی O بیابید.



* برای بدست آوردن لنگر نیرو را بر نیروی عمود بر فاصله ضرب می‌کنیم. *

$M = r \times F$

$M_O = ۳ \times F \sin ۲۰ = ۳۰ \times ۳۰ \times \sin ۲۰ = +۳۰{,}۸ \text{ lb.ft}$

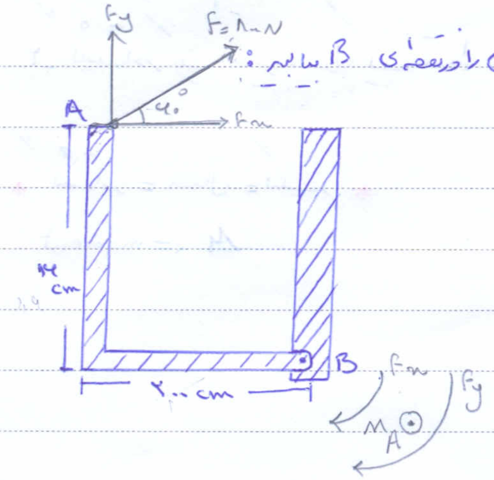
* در سیستم SI واحد لنگر نیوتن.متر است زیرا * $M = \underset{\text{N}}{F}\ \underset{\text{m}}{r}$

نیرو ← N ، فاصله ← m

* اگر واحدها در یک دستگاه باشند نیاز به تبدیل نیست.

* $\left[\begin{matrix} N & em & m \\ lb & in & ft \end{matrix}\right.$ ← مثلاً

مثال: نیروی ۸۰۰N مطابق شکل به نقطه‌ی A وارد شده است، گشتاور آن را در نقطه‌ی B بیابید:


Fy
F=۸۰۰N
A
۶۰°
Fx
۳۴ cm
۲۰۰ cm
B
Fx
Fy
M_A

$F_x = F\cos 60^\circ = ۸۰۰ \times \cos ۶۰ = ۴۰۰$

$F_y = F\sin 60^\circ = ۸۰۰ \times \sin ۶۰ = ۶۹۲$

* برای بدست آوردن گشتاور ← ابتدا تجزیه‌ی نیروها را در فاصله تا محور ضرب می‌کنیم. *

* $2F\,\underset{1}{\cancel{\sin 90^\circ}}$ *

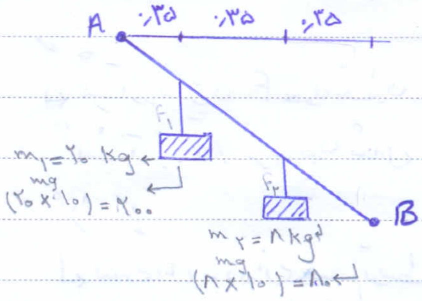
* واحدها را به متر تبدیل می‌کنیم *

$M_B = F_x + F_y$

$M_B = F_x \times ۱۴ \times F_y \times ۲$

$\Rightarrow ۴۰۰ \times ۱۴ + ۶۹۲ \times ۲ = ۲.۶۶۲$ N.M

مثال: گشتاور را در نقاط A,B بیابید.


A
۰٫۳۵
۰٫۳۵
۰٫۳۵
F₁
F₂
B
m₁ = ۲۰ kg
mg
(۲۰ × ۱۰) = ۲۰۰
m₂ = ۸ kg
mg
(۸ × ۱۰) = ۸۰

* بعد از بدست آوردن گشتاور مثال نیرو را در فاصله ضرب می‌کنیم *

* نیرو ← $W = mg \Rightarrow m \times ۱۰$ (۹٫۸۱)

A

$M_1 = W_1 \times ۰٫۳۵ = ۲۰۰ \times ۰٫۳۵ = ۷۰$

$M_2 = W_2 \times ۰٫۷ = ۸۰ \times ۰٫۷ = ۵۶$

$M_A = M_1 + M_2 = ۱۲۶$ N.M

B

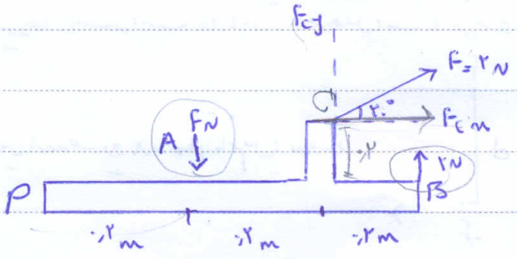
$M_1 = -W_1 \times ۰٫۳۵ = -۲۰۰ \times ۰٫۷ = -۱۴۰$

$M_2 = -W_2 \times ۰٫۷ = -۸۰ \times ۰٫۷ = -۲۸$

$M_B = -M_1 - M_2 = -۱۴۰ - ۲۸ = -۱۶۸$ N.M

* برای جمع گشتاور، نوع بستن را نسبت به سمت نقطه‌ی اصلی می‌چرخانیم. *

مثال : مجموع گشتاورها را در نقطه‌ی P بیابید .


F_{cy}
F = ۲N
C
۲۰°
F_{cx}
A
F_N
۰,۲
۲N
B
P
۰,۲m
۰,۲m
۰,۲m

$F_{cx} = ۲ \times \cos ۲۰ = ۱,۸۶$

$F_y = ۲ \times \sin ۲۰ = ۰,۶۸$

$M_A = ۴ \times ۰,۲ = ۰,۸$

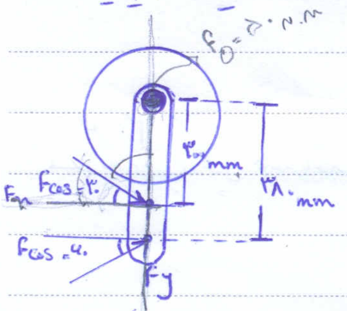
$M_B = -۲ \times ۰,۶ = -۱,۲$

$$M_C \begin{cases} M_{cx} = F_{cx} \times ۰,۲ = ۱,۸۶ \times ۰,۲ = ۰,۳۷ \\ M_{cy} = F_{cy} \times ۰,۴ = -۰,۶۸ \times ۰,۴ = -۰,۲۷ \\ M_C = +۰,۳۷ - ۰,۲۷ = -۰,۱ \end{cases}$$

$M_P = M_A - M_B - M_C$

$M_P = ۰,۸ - ۱,۲ - ۰,۱ = -۰,۳ \text{ N.m}$

تمرین! : دو نیروی مساوی F مطابق شکل زیر وارد می‌شوند، اگر گشتاور در نقطه‌ی O = ۵۰ N.m باشد. اندازه‌ی نیروی F را بیابید .


$f_O = ۵۰ \text{ N.m}$
۳۰ mm
۳۸۰ mm
F_{cx}
$F\cos ۳۰$
$F\cos ۶۰$
F_y

$M_O = F\cos ۳۰ \times ۰,۳ + F\cos ۶۰ \times ۰,۳۸ = ۵۰$

$۰,۲۶F + ۰,۱۹F = ۵۰$

$۰,۴۵F = ۵۰$

$F = ۱۱۱,۱۱ \text{ N}$

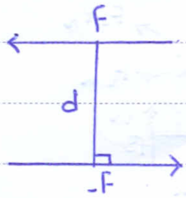
* چون نیروها در راستای عامل گشتاوری نمی‌سازد

از sin استفاده نمی‌کنیم . *

گشتاور کوپل :

- هرگاه دو نیروی مساوی دارای خط اثرهای موازی و در جهت‌های مخالف بر سازه اثر کنند، یک کوپل نیرو را می‌سازند، در این حالت برآیند نیروها صفر است اما باعث چرخش سازه می‌شود.

$F + (-F) = 0$

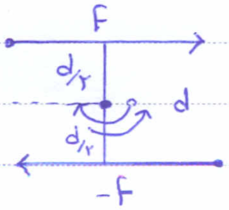


گشتاور حول نقطه‌ی O : یکی از دو نیرو X فاصله‌ی مابین دو نیرو

مثبت

$$M_O = -(F \cdot d/2 + F \cdot d/2)$$
$$M_O = F(d/2 + d/2) = Fd$$
$$\boxed{M_O = Fd}$$

<=

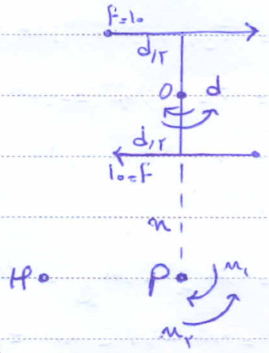


* دو نیرو در دو جهت مخالف با حالت موازی کوپل می‌سازد *

خاصیت گشتاورهای کوپل :

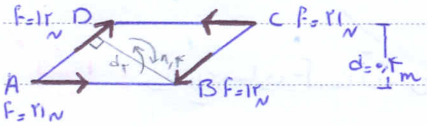
مثبت

$$M_P = F(d+x) - Fx$$
$$M_P = Fd + \cancel{Fx} - \cancel{Fx}$$
$$\boxed{M_P = Fd}$$



$$M_O = M_P = M_H = F \times d$$
$$\Rightarrow 10 \times 10 = 100_{N.M}$$

مثال : روی شکل متوازی‌الاضلاع تحت تأثیر ۲ کوپل قرار دارد :



الف) گشتاور کوپل تشکیل شده، از دو نیروی ۲۱_N را بدست آورید؟

الف) $M_{AC} = -۲۱ \times ۰٫۴ = -۸٫۴_{N.M}$

ب) اگر برآیند دو کوپل صفر باشد، فاصله‌ی عمودی بین نیروهای ۱۲_N را بیابید؟

ب) $M_{DB} = ۸٫۴ = ۱۲ \times d_۲$

$\Rightarrow d_۲ = \frac{۸٫۴}{۱۲} = ۰٫۷_m$

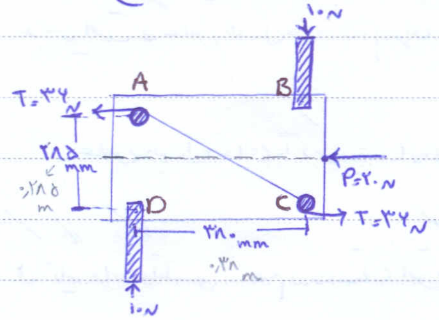
یا

$-(\overset{-۸٫۴}{\cancel{۲۱ \times ۰٫۴}}) + (۱۲ \times d_۲) = ۰$

$\Rightarrow ۱۲ d_۲ = ۸٫۴$

$\Rightarrow d_۲ = \frac{۸٫۴}{۱۲} = ۰٫۷_m$

مثال: ۲ پین چوبی در A و C و دو میله در B و D به ورق فولادی متصل شده است. طنابی را مطابق شکل از پین‌ها می‌گذرانیم، اگر به میله‌ها نیروی ۱۰N وارد شود، تعیین کنید:



الف) اگر T = ۳۶N باشد، کوپل برآیند وارد بر ورق را حساب کنید.

$$M_{DB} = ۱۰ \times ۰,۳۸ = ۳,۸_{N.m}$$

$$M_{AC} = ۳۶ \times ۰,۲۸۵ = -۱۰,۲۶_{N.m}$$

$$M_P = ۳,۸ + (-۱۰,۲۶) = -۶,۴۶_{N.m}$$

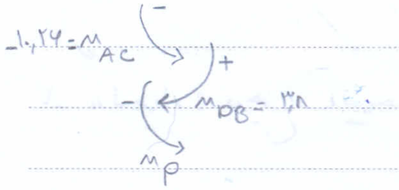
ب) اگر برآیند کوپل وارد بر این جسم $۱۰۰_{N.m}$ باشد مقدار T را بدست آورید.

$$\Rightarrow ۱۰ \times \cancel{۰,۳۸} + T \times \cancel{۰},۲۸۵ = ۱۰۰_{N.m}$$

$$۳,۸ + ۰,۲۸۵\,T = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۰۰ - \cancel{۳,۸}}_{۹۶,۲} = ۰,۲۸۵\,T \quad \Longrightarrow T = -\frac{۹۶,۲}{۰,۲۸۵} = -۳۳۷,۵_{N}$$

ج) با فرض اینکه نیروی T = ۳۶N باشد و نیروی ۱۰N بر میله‌ها وارد شود و علاوه بر آن نیروی ۲۰N به نقطه‌ی P وارد شود، برآیند گشتاورهای وارد بر نقطه‌ی P را بیابید.



$$M_P = M_{AC} + M_{DB} + M_P$$

$$= -۱۰,۲۶ + ۳,۸ + ۲۰ \times \frac{۰,۲۸۵}{۲}$$

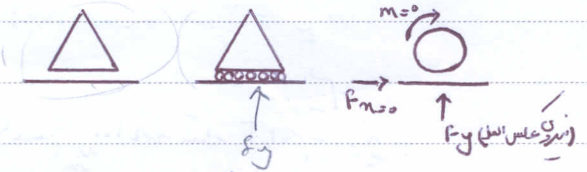
$$M_P = -۹,۲۶_{N.m}$$

فصل چهارم: تعادل اجسام

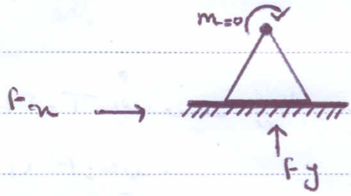
- فرض می‌کنیم که سازه‌های مورد نظر و نیروهایی که به آن‌ها وارد می‌شوند، هر دو در یک صفحه‌ی واحد قرار دارند، بدیهی است که عکس‌العمل‌های لازم برای نگهداری سازه‌ها هم در همین صفحه خواهد بود.

- عکس‌العمل‌های وارد بر یک سازه‌ی ۲ بعدی بسته به نوع تکیه‌گاه‌های مربوط به ۳ دسته تقسیم می‌شوند:

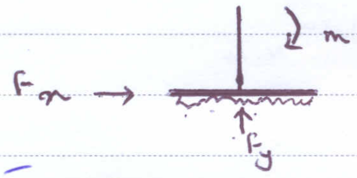
۱- تکیه‌گاه غلتکی: هم در راستای افق حرکت می‌کند و هم به دور خود می‌چرخد. (یک نیروی مجهول به سمت بالا دارد).



۲- « مفصلی: فقط دور خود می‌گردد، در راستای افق و قائم حرکت نمی‌کند (۲ مجهول در راستای قائم و افق دارد).

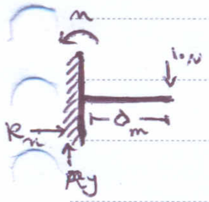


۳- « گیردار: در هیچ راستایی حرکت نمی‌کند (۳ مجهول دارد)



* شرط تعادل برای اجسام صلب ⟸ $\left[\begin{array}{l}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum M_0=0\end{array}\right.$ ⟸ وقتی تعداد مجهولات با معلومات برابر باشند سازه معلوم نامیده می‌شود *

مثال: عکس‌العمل تکیه‌گاه A را بیابید.



I $\sum F_x=0$

$R_x=0$

II $\sum F_y=0$

$10-R_y=0$

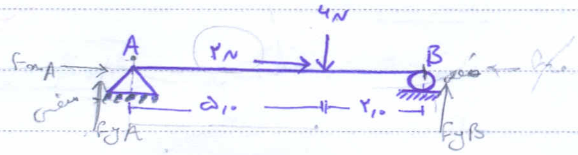
$R=10$

$\Longrightarrow$ III $\sum M_A=0$

$10\times5-M=0$

$M=5\,N.m$

مثال: واکنش های تکیه گاهی زیر را بیابید.


۶N
A
B
۲N
F_xA
F_yA
F_yB
منفی
۵,۰
۲,۰

نکته: بعد از مشخص نیرو (جهت) در ساختار برابر تعیین ای ایجاد می کنیم *

I $\sum F_x = ۰$

$F_xA + ۲N = ۰$

$F_xA = -۲N$

II $\sum M_A = ۰$

$۶ \times ۵ - F_yB \times ۷ + ۲ \times ۰ = ۰$

$۳۰ = ۷F_yB$

$F_yB = \frac{۳۰}{۷} \simeq ۴,۲۸_{N.M}$

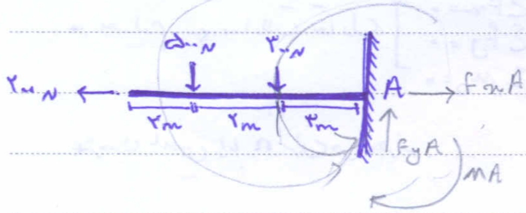
III $\sum F_y = ۰$

$F_yA + F_yB - ۶ = ۰$

$۴,۲۸ - ۶ + F_yA = ۰$

$F_yA = ۱,۷۲_{N.M}$

مثال: واکنش های تکیه گاهی زیر را بیابید.


۵۰۰N
۳۰۰N
۲۰۰N
A
F_xA
F_yA
MA
۲m
۲m
۳m

I $\sum F_x = ۰$

$F_xA - ۲۰۰$

$F_xA = ۲۰۰_N$

II $\sum F_y = ۰$

$F_yA - ۵۰۰ - ۳۰۰ = ۰$

$F_yA = ۸۰۰_N$

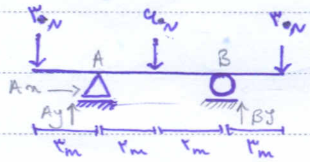
III $\sum M_A = ۰$

$-۵۰۰ \times ۵ - ۳ \times ۳۰۰ + MA = ۰$

$-۲۵۰۰ - ۹۰۰ + MA = ۰$

$M_A = ۳۴۰۰ \ N.M$

تمرین: واکنش های تکیه گاهی زیر را بیابید.


۳۰N
۶۰N
۳۰N
A
B
Ax
Ay
By
۳m
۲m
۲m
۳m

Ⓘ $\sum F_x = ۰$ $\boxed{Ax = ۰}$

Ⓘⓘ $\sum F_y = ۰$ $Ay + By - ۳۰ - ۶۰ - ۳۰ = ۰$ $\boxed{Ay + By = ۱۲۰}$

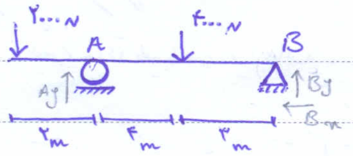
Ⓘⓘⓘ $\sum M_A = ۰$ $۳۰ \times ۷ + ۶۰ \times ۲ - ۳۰ \times ۳ - By \times ۴ = ۰$

$۲۴۰ = ۴By \longrightarrow \boxed{By = \frac{۲۴۰}{۴} = ۶۰}$

(II) با توجه به معادله $\longrightarrow Ay + By = ۱۲۰ \xrightarrow[By]{\text{با جایگزینی}} Ay + ۶۰ = ۱۲۰$

$Ay = ۱۲۰ - ۶۰ = ۶۰$ $\boxed{Ay = ۶۰}$

تمرین :



(I) $\Sigma F_x = ۰$ $\boxed{B_x = ۰}$

(II) $\Sigma F_y = ۰$ $- ۲۰۰۰ - ۴۰۰۰ + A_y + B_y = ۰$ $\boxed{A_y + B_y = ۶۰۰۰}$

(III) $\Sigma M_B = ۰$ $- ۲۰۰۰ \times ۹۰ - ۴۰۰۰ \times ۳ + A_y + ۷ = ۰$

$۳۰۰۰۰ = A_y \times ۷ \longrightarrow \boxed{A_y = ۴۲۸۵_N}$

(II) با توجه به معادله $\longrightarrow A_y + B_y = ۶۰۰۰ \xrightarrow[A_y]{\text{با جایگزینی}} ۴۲۸۵ + B_y = ۶۰۰۰$ $\boxed{B_y = ۱۷۱۴_N}$

تعیین درجه‌ی معینی و نامعینی یک سازه :

- درجه نامعینی یک سازه = تعداد معلوم‌ها ـ تعداد مجهولات

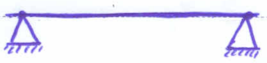
* مجهول ← واکنش‌های تکیه‌گاهی

* معلوم ← معادلات تعادل

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ \\ \Sigma M_O = ۰\end{array}\right]$$

* درجه‌ی نامعینی را با n نشان می‌دهند.

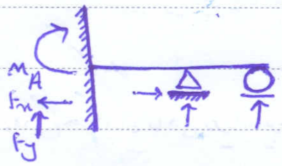
مثال :



مجهول = ۲+۲ = ۴

معلوم = ۳

$n = ۴ - ۳ = ۱ \longrightarrow$ * یک درجه نامعین است.



مجهول = ۳ + ۲ + ۱ = ۶

معلوم = ۳

$n = ۶ - ۳ = ۳ \longrightarrow$ * سه درجه نامعین است

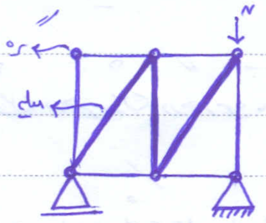
فصل پنجم: خرپا

- این سازه از اعضای مستقیم که در انتهای خود به یکدیگر متصل شده‌اند تشکیل شده است. بارهای وارده بر خرپا تنها در گره‌ها اثر می‌کنند. هر خرپا از میله و گره تشکیل شده است.

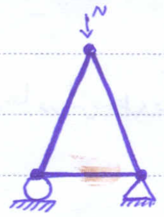
تعداد گره‌ها × ۲ - واکنش‌های تکیه‌گاهی + تعداد میله‌های خرپا = درجه نامعینی خرپا

$$n = m + r - 2 \times J$$

مثال:



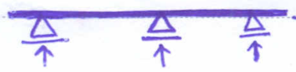
$n = ۹ + ۳ - (۲ \times ۶) = ۰$

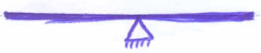


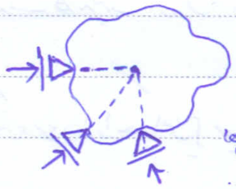
$n = ۳ + ۳ - (۲ \times ۳) = ۰$

پایداری و ناپایداری سازه:

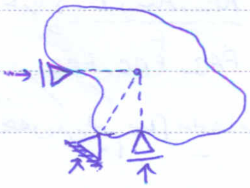
- زمانی که واکنش‌های تکیه‌گاهی یک سازه موازی و متقارب باشند، سازه ناپایدار است.


→ سازه ناپایدار


→ سازه پایدار


→ ناپایداری متقارب بودن واکنش‌ها

* متقارب بودن یعنی همه‌ی واکنش‌ها در یک نقطه جمع می‌شوند.


→ پایداری

حل خرپای معین :

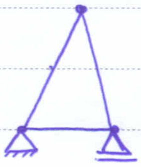
۱- برای تحلیل خرپای معین استاتیکی روش‌های گوناگونی وجود دارد ، روش‌های مفصل و مقطع از جمله روش‌های اصلی برای تحلیل خرپای معین محسوب می‌شوند .

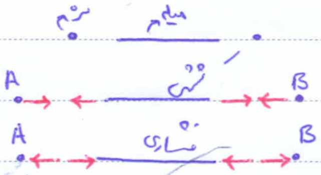
۱- تحلیل خرپاهای معین به روش مفصل (گره) :

- در یک سازه متعادل ، هریک از اجزای سازه نیز در حال تعادل است ، بر این اساس در روش مفصل ترسیمی آزاد هریک از مفاصل خرپا رسم شده و با اعمال معادلات تعادل در دو راستای دلخواه دو معادله بدست می‌آید .

در این روش در هر گره تنها دو مجهول مستقل قابل تعیین است .

تذکر۱ : در این روش عکس العمل نیروی محوری اعضا را بر گره متصل به آن اعمال می‌کنیم ، با توجه به این موضوع به جهت نیروی وارد بر گره‌ها در طی حل دقت شود . *





تذکر۲ : برای تسریع در حل با این روش ، معمولاً حل خرپا را از گره‌ای که تنها با ۲ میله به سایرین متصل می‌باشد ، آغاز می‌کنیم . *

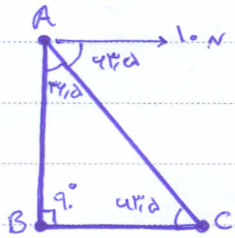
* هدف : بدست آوردن نیروهای داخلی اعضای میله‌ای خرپا (AB ، AC ، BC)

F

FAB ، FAC ، FBC

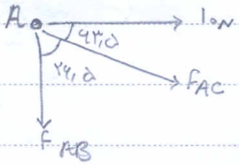
* وقتی گره‌ها را جدا کردیم نیروهای وارد بر میله‌های مذکور را مشخص می‌کنیم که نام میله‌ها می‌شود . *

مثال: (روش گره (مفصل))


A
۱۰N
۴۳,۵
۴۶,۵
B
۹۰°
۴۳,۵
C

* نکته: جهت حول نیروی مجهولات کششی دارند برآیند را مثبت می‌دهیم.

Ⓘ


A
۱۰N
۴۳,۵
۴۶,۵
fAC
fAB

$\Sigma F_x = 0$

$10 + F_{AC} \times \cos 43.5^\circ = 0$

$\Rightarrow F_{AC} = \frac{-10}{\cos 43.5} = \underline{-22.7}\,N$

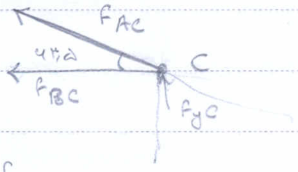
II $\Sigma F_y = 0$

$F_{AB} + F_{AC} \times \sin 46.5^\circ = 0$

$F_{AB} - 22.7 \times \sin 46.5^\circ = 0$

$F_{AB} = 22.7 \times \sin 46.5 = \underline{+20.31}\,N$

III


fAC
۴۳,۵
C
fBC
fyC

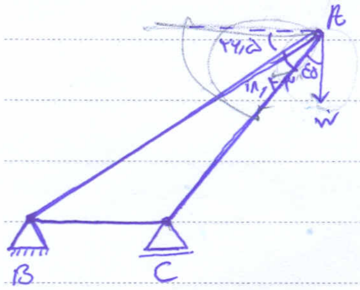
$\Sigma F_x = 0$

$-F_{AC} \cos 43.5 - F_{BC} = 0$

$-(-22.7) \times \cos 43.5 - F_{BC} = 0$

$F_{BC} = +\underline{10.12}\,N$

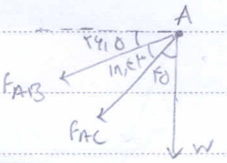
تمرین: اگر $F_{AB} = 1000\,N$ باشد، اندازه نیروهای W و FAC را بیابید.


A
۲۶,۵
۱۸,۴
۴۵
W
B
C

داده مسأله: $F_{AB} = 1000\,N$

خواسته مسأله: $F_{AC} = ?$ و $W = ??$

ترسیم نمودار نیروها در گره A ←


A
۲۶,۵
۱۸,۴۳
۴۵
fAB
fAC
W

$45^\circ = (18.4 + 26.5)$

Ⓘ $\Sigma F_x = 0$ $-F_{AB} \cos 26.5 - F_{AC} \cos 45 = 0$

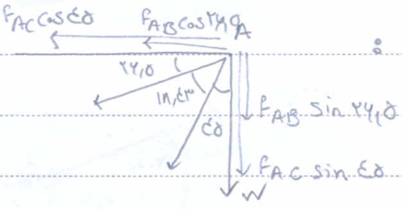
$-1000 \times 0.89 - F_{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$-890 - 0.707\,F_{AC} = 0$ $-0.707\,F_{AC} = 890$ $\boxed{F_{AC} = -1259}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$F_{AC} \cos \boxed{۴۵} \rightarrow (۱۸٫۴۳ + ۲۶٫۵)$

تجزیه نیروها :



$F_{AC} \cos ۴۵$
$F_{AB} \cos ۲۶٫۵$
A
۲۶٫۵
۱۸٫۴۳
۴۵
$F_{AB} \sin ۲۶٫۵$
$F_{AC} \sin ۴۵$
W

$\textcircled{II}$ $F_y = ۰$

$-w - F_{AC} \sin ۴۵ - F_{AB} \sin ۲۶٫۵ = ۰$

$-w - ۱۲۵۹ \times ۰٫۷۰۷ - ۰٫۴۴ \times F_{AB} = ۰$

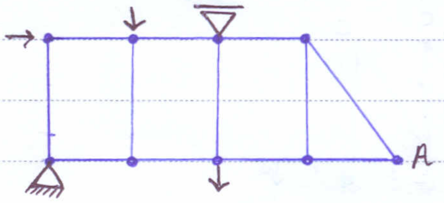
* مقدار F_{AB} در صورت مسأله ۱۰۰۰ N داده شده است پس با جاگذاری مقدار آن در رابطه داریم:

$-w - ۱۲۵۹ \times ۰٫۷۰۷ - ۱۰۰۰ \times ۰٫۴۴ = ۰$

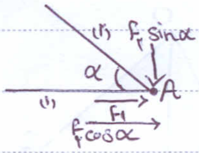
$$\boxed{w = -۳۵۰٫۳۴ \, N}$$

* نکته : با بررسی تعادل گره در روش مفصل می‌توان به نتایج زیر اشاره کرد : (خیلی مهم)

1 - اگر در گره تنها دو عضو از اعضای خرپا به یکدیگر برسند و هیچ باری روی آن گره‌ها اثر نکند ، نیروی داخلی در هر دو عضو با بررسی تعادل در راستای دو محور ، صفر است . این اعضا صفر نیرویی نامیده می‌شوند .



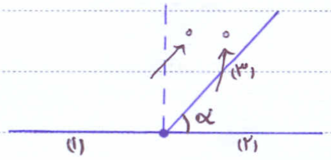
اثبات : ترسیم دیاگرام آزاد در A ←


(۲) $F_2 \sin\alpha$
α
A
(۱)
F_1
$F_2 \cos\alpha$

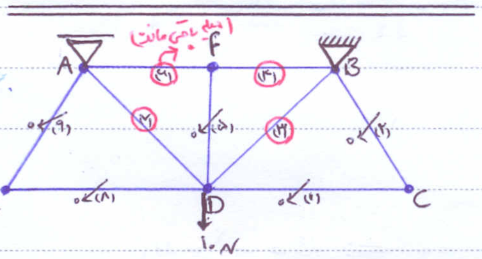
$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 + \cancel{F_2 \cos\alpha} = 0 \longrightarrow F_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_2 \sin\alpha = 0 \longrightarrow F_2 = 0$$

* نکته : اگر در یک گره ۳ عضو از خرپا به یکدیگر رسیده و ۲ عضو از آن‌ها هم راستا باشند در صورتی که بر گره باری خارجی اثر نکند ، عضو سوم الزاماً ، صفر نیرویی می‌باشد . ((فقط اعضا در هر زاویه‌ای وارد شود صفر است))


۰
۰
(۳)
α
(۱)
(۲)

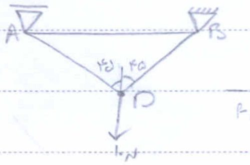
مثال : تحلیل خرپا .

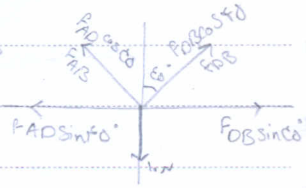

(اعضا باقی مانده)
A
F
B
(۶)
(۴)
(۳)
(۵) ۰
(۹) ۰
(۲) ۰
E
(۸) ۰
D
(۱) ۰
C
۱۰N

Ⅰ $\sum F_x = 0$

$F_{DB} \sin 45 - F_{AD} \sin 45 = 0$

$\cancel{F_{DB} \sin 45} - F_{AD} \cancel{\sin 45} \Rightarrow \boxed{F_{DB} = F_{AD}}$


A
B
۴۵
۴۵
D
۱۰N


$F_{AD} \cos 45$
F_{AB}
$F_{DB} \cos 45$
F_{DB}
۴۵
$F_{AD} \sin 45°$
$F_{DB} \sin 45°$
۱۰N

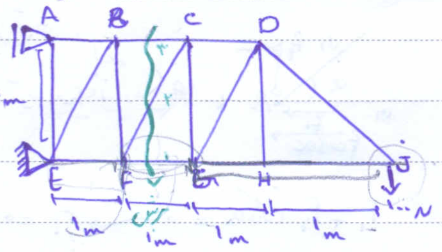
Ⅱ $\sum F_y = 0$

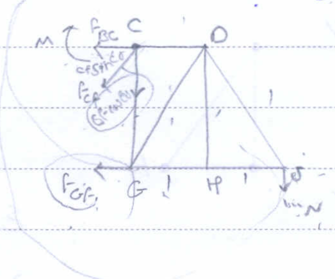
[illegible] $F_{DB} \cos 45 + F_{DB} - 10 = 0$

$2F_{DB} \cos 45 = 10 \Rightarrow 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times F_{DB} = 10 \Rightarrow F_{DB} = F_{AD} = 7.09\,N$

۲- تحلیل خرپای معین به روش مقطع: در این روش با زدن مقاطعی دلخواه در خرپا، و اعمال معادلات تعادل بر آن، نیروی اعضای برش خورده به دست می آید. با توجه به اینکه بر هر مقطع تنها ۳ معادله‌ی تعادل می‌توان اعمال کرد، در یک مقطع مناسب باید تنها نیروی ۳ عضو مجهول باشد.

مثال: بار ۱۰۰N بر خرپای روبرو در نقطه‌ی J وارد شده است، نیروهای اعضای BC، CF و FG را بیابید.





(۲×۲

(I) $\Sigma M_C = ۰$

$f_G \times ۱ + ۱۰۰ \times ۲ = ۰ \Rightarrow \underline{f_G = -۲۰۰\,N}$

(II) $\Sigma F_y = ۰$

$-CF \cos ۴۵ + ۱۰۰ = ۰$

$-CF \times \sqrt{۲}/۲ + ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow CF = \frac{-۲ \times ۱۰۰}{\sqrt{۲}} = \underline{-۱۴۱{,}۸۴\,N}$

(III) $\Sigma F_x = ۰$

$-F_G - CF \sin ۴۵ - BC = ۰$

$-۲۰۰ + ۱۴۱{,}۸۴ \times \sqrt{۲}/۲ - BC = ۰ \Rightarrow \underline{B = -۳۰۰\,N}$

نکته: در قسمت برش خورده، بعد فقط نیروها را می‌بینیم.

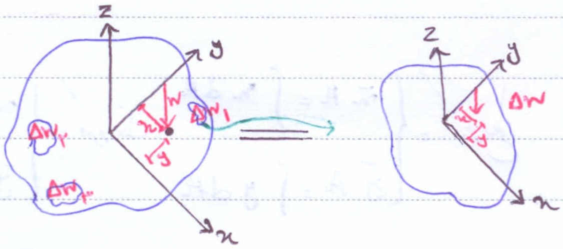
← گشتاور حول نقطه‌ای که مفصل باشد (پین) = صفر است.

← طوری مقطع می‌زنیم که آن عضوهای منظور (که می‌خواهیم نیروهایش را بدست آوریم) قطع کنیم.

فصل ششم : مرکزوار ، مرکز ثقل و ممان اینرسی

خواص سطوح : کشش وارد از زمین بر یک جسم صلب را با یک نیرو W نشان داده ایم . این نیرو را با نیروی ثقل یا وزن جسم می‌گویند ، در مرکز ثقل جسم اثر می‌کند . در واقع زمین بر تمام ذرات تشکیل دهنده جسم نیرو وارد می‌کند . لذا اثر زمین بر جسم صلب را باید با تعداد زیادی نیروهای کوچک توزیعی در تمام جسم نشان داد . برآیند این نیروهای کوچک را با یک نیروی W نشان می‌دهیم .

مرکز ثقل جسم دوبعدی : یک ورق نازک افقی را در نظر بگیرید این ورق را به n جزء مساوی تقسیم می‌کنیم .



$$\Rightarrow \quad \Sigma F_z = 0$$

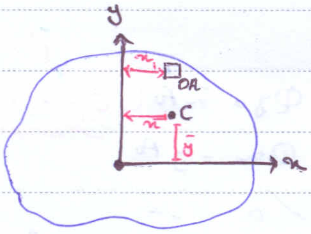
$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots$$

$$\bar{x}W = \Delta W_1 x_1 + \Delta W_2 x_2 + \dots$$

محل اثر مرکز ثقل $\leftarrow$ $\bar{x}\underset{\text{جزئی}}{W} = \int x \, \underset{\longrightarrow}{dW}$ جزء جرم

$$\bar{y}W = \int y \, dW$$

مرکزوار سطح :



γ وزن مخصوص $= \dfrac{W}{V}$ وزن / حجم

جزء جرم $\Delta W = \gamma t \, \Delta A$ $\longrightarrow$ مساحت جزئی

ضخامت ورق

$$W = \gamma t A$$

$$\bar{x}W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2$$

$$\bar{x}(\gamma \Delta t) = x_1 \gamma t \Delta A_1 + x_2 \gamma t \Delta A_2 + \dots$$

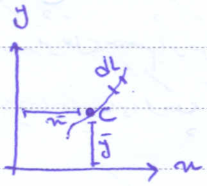
$$\bar{x}A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots$$

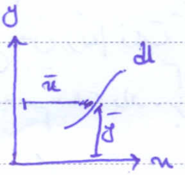
$$\bar{x}A = \int x \, dA$$

$$\bar{y}A = \int y \, dA$$

* نکته : با این معادله‌های گفته شده مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ (مرکز وزن هم‌چنین) به دست می‌آید. این نقطه‌ی C را مرکزوار سطح A نیز نامند.

مرکز خط :





$$\bar{x}L = \int x\,dL$$
$$\bar{y}L = \int y\,dL$$

خلاصه فرمول‌های این مبحث :

مرکز خط = $\begin{cases} \bar{x}L = \int x\,dL \\ \bar{y}L = \int y\,dL \end{cases}$ مرکز سطح = $\begin{cases} \bar{x}A = \int x\,dA \\ \bar{y}A = \int y\,dA \end{cases}$ مرکز ثقل = $\begin{cases} \bar{x}W = \int x\,dW \\ \bar{y}W = \int y\,dW \end{cases}$

---

* ممان دوم سطح ← اینرسی I_x . *

ممان‌های اول سطوح (استاتیک Q) و خطوط :

$\int x\,dA$ و $\int y\,dA$ در معادلات فوق، ممان اول سطح A نسبت به محورهای y و x می‌باشد.

$$Q_y = \int x\,dA \qquad \bar{x}A = \int x\,dA$$
$$Q_x = \int y\,dA$$

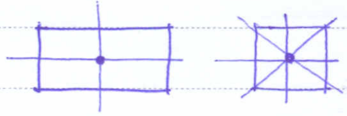
ممان استاتیک $\Rightarrow$ $\begin{cases} Q_y = \bar{x}A \\ Q_x = \bar{y}A \end{cases}$ (مساحت این سطح × فاصله‌ی مرکز این سطح تا محور مورد نظر)

* نکته : اگر سطح A دارای محور تقارن باشد مرکزوار C آن روی آن محور قرار دارد.

← اگر سطح یا خطی دارای دو محور تقارن باشد مرکزوار در نقطه‌ی تلاقی آن دو محور قرار دارد.

← اگر مرکزوار یک سطح روی یکی از محورهای مختصات باشد، ممان استاتیک نسبت به آن محور صفر است.

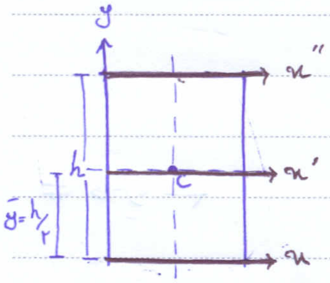
* نکته : اگر مرکز روی یکی از محورهای مختصات باشد ممان استاتیک نسبت به آن محور صفر است .



* مرکز تقارن ، ثقل و سطح .

نحوه‌ی بدست آوردن مرکز سطح و ممان استاتیک در سطوح هندسی منظم :

مستطیل ←


y
x''
h
x'
C
$\bar{y} = h/2$
x

Ⅰ مرکز سطح * $\bar{y}_x = h/2$

مساحت * $S_x = bh$

ممان استاتیک * $Q_x = \frac{h}{2} \times bh = \frac{bh^2}{2}$

Ⅱ * $\bar{y}_{x'} = 0$ ~~$\times bh = 0$~~

* $S_{x'} = bh$

* $Q_{x'} = 0 \times bh = 0$

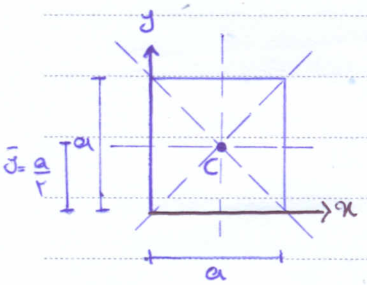
* ممان استاتیک وقتی از مرکز سطح می‌گذرد ، صفر است . *

Ⅲ * $\bar{y}_{x''} = h/2$

* $S_{x''} = bh$

* $Q_{x''} = h/2 \times bh = bh^2/2$

مربع ←

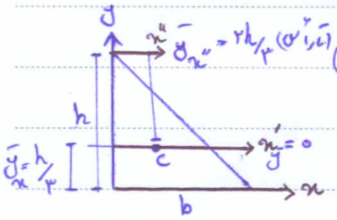

y
a
$\bar{y} = \frac{a}{2}$
C
x
a

* $\bar{y}_x = \frac{a}{2}$

* $S_a = a \times a = a^2$

* $Q_x = \frac{a}{2} \times a^2 = \frac{a^3}{2}$

مثلث ←


y
x''
$\bar{y}_{x''} = 2h/3$ (در ۲ ، ۱)
h
$\bar{y}_x = h/3$
C
$x' = 0$
y
x
b

Ⅰ * $\bar{y}_x = h/3$

* $S = \frac{h \times b}{2}$

* $Q_x = h/3 \times \frac{b \times h}{2} = \frac{bh^2}{9}$

Ⅱ $* \ \bar{y} = \cancel{\frac{h}{۲}}\ ۰$

$* \ S = \frac{h \times b}{۲}$

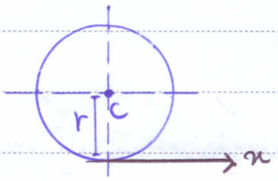
$* \ Q_{x'} = ۰ \times \frac{b \times h}{۲} = ۰$

Ⅲ $* \ \bar{y}_{x''} = \frac{۲h}{۳}$

$* \ S = \frac{h \times b}{۲}$

$* \ Q_{x''} = \frac{۲h}{۳} \times \frac{h \times b}{۲} = \frac{bh^{۲}}{۳}$

دایره ←

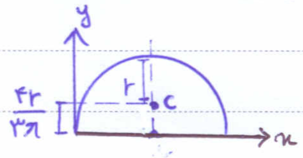


$* \ \bar{y}_x = r$

$* \ S = \pi \times r^{۲}$

$* \ Q_x = r \times \pi \times r^{۲} = \pi r^{۳}$

نیم دایره ←

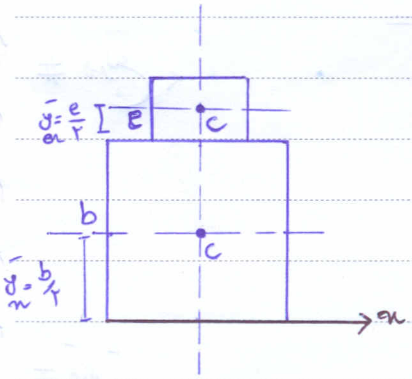

y
r
c
$\frac{۴r}{۳\pi}$
x

$* \ \bar{y}_x = \frac{۴r}{۳\pi}$

$* \ S = \frac{\pi \times r^{۲}}{۲}$

$* \ Q_x = \frac{۴r}{۳\pi} \times \frac{\pi \times r^{۲}}{۲} = \frac{۲r^{۳}}{۳}$

ممان استاتیک در اشکال ترکیبی ← توضیح ؟


$\bar{y}_x = \frac{e}{۲}$
e
c
b
c
$\bar{y}_x = \frac{b}{۲}$
x

$$Q_x = \frac{\frac{b}{۲} \times b^{۲} + (b + c/۲) \times c^{۲}}{b^{۲} + c^{۲}}$$

گشتاور دوم سطح : ممان اینرسی I، یا ممان دوم قائم سطوح .

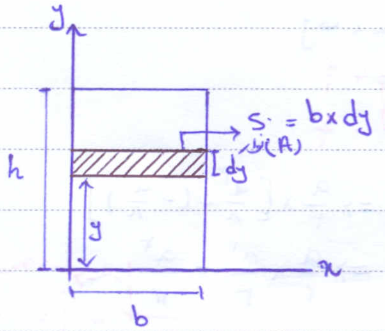
* A ← مساحت است *

$$\boxed{I_x = \int y^2 dA \quad // \quad I_y = \int x^2 dA}$$

- این انتگرال‌ها را ممان دوم قائم سطوح می‌نامند . با انتخاب نوار نازک dA موازی با یکی از محورهای مختصات به سهولت قابل محاسبه‌اند .

- برای محاسبه‌ی I_x این نوار را موازی محور x می‌گیریم . به این ترتیب از ضرب کردن مساحت dA نوار در y^2، ممان اینرسی به دست می‌آید .

مثال : ممان اینرسی مستطیل زیر را بدست آورید . (ممان اینرسی را نسبت به قاعده‌اش با استفاده از انتگرال گیری مشخص کنید ؟



$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \times b \times dy .$$

Ⓘ
(مرحله II ص ۳۲)

* یادآوری : حل برخی انتگرال گیری :

$$\int y\, dy = \frac{y^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}$$

$$\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$$

* برای انتگرال گیری هر چند عدد داشته باشیم به y را از انتگرال خارج می‌کنیم و بعد انتگرال می‌گذاریم . یعنی :

$$\Longrightarrow \frac{y^{n+1}}{n+1} .$$

$$I_x=\int y^2\times b\times dy \Rightarrow b\times\int y^2 dy$$

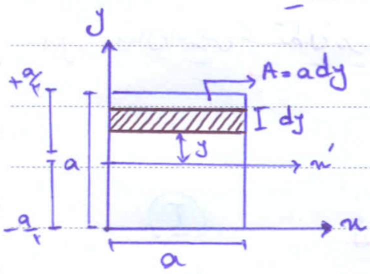
$$\Rightarrow b\times\frac{y^3}{3}\Big]_0^h$$ → بازه انتگرال گیری

Ⓘ

$$=\frac{b}{3}\times[h^3-0]=\boxed{\frac{bh^3}{3}}$$ → در کسرهای معادله به دست آمده h و ۰ را جایگذاری می‌کنیم

* در صورتی که محور x لب مستطیل باشد، ممان اینرسی آن $I_x=\frac{bh^3}{3}$ می‌شود. *

مثال: ممان اینرسی مربع زیر را نسبت به محور x' با استفاده از روش انتگرال گیری بدست آورید.



$$I_{x'}=\int y^2 dA \Rightarrow \int y^2\times a\times dy$$

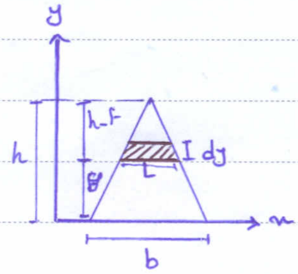
$$\Rightarrow a\int y^2 dy \Rightarrow \frac{ay^3}{3}\Big]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3}\times\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3-\left(-\frac{a}{2}\right)^3\right]\Rightarrow\frac{a}{3}\times\left[\frac{a^3}{8}-\left(-\frac{a^3}{8}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{a}{3}\times\frac{a^3}{4}=\boxed{\frac{a^4}{12}}$$ → محور x' از وسط مربع می‌گذرد

* اگر محور x ها لب مربع باشد، ممان اینرسی آن مربع $\frac{a^4}{3}$ خواهد بود. *

مثال: ممان اینرسی مثلث را با روش انتگرال گیری نسبت به قاعده‌اش بیابید.



* برای بدست آوردن L از قاعده‌ی تشابه مثلث‌ها ⇐ $\boxed{\frac{L}{b}=\frac{h}{y}}$ است استفاده می‌کنیم *

Ⓘ $\frac{L}{b}=\frac{h-y}{h}\Rightarrow b\times h-y=L\times h\Rightarrow L=\frac{b(h-y)}{h}$ اثبات =۲

Ⓘ $dA=L\,dy\Rightarrow\frac{b(h-y)}{h}\Rightarrow dy$

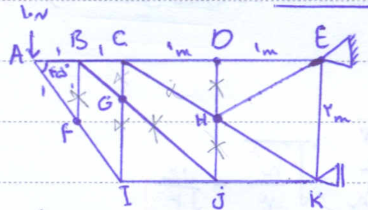
Ⅲ $I_x = \int y^۲ dA \Rightarrow I_x = \int y^۲ \times \frac{b}{h}(h-y)\,dy$

$\Rightarrow I_x = \frac{b}{h}\int \underbrace{y^۲ \times (h-y)}\,dy$

$\Rightarrow I_x = \frac{b}{h}\int y^۲h - y^۳\,dy \Big]_۰^h$

$\Rightarrow \frac{b}{h}\left[\frac{hy^۳}{۳} - \frac{y^۴}{۴}\right]$

$\Rightarrow \frac{b}{h}\times\left[\frac{h^۴}{۳} - \frac{h^۴}{۴}\right] = \frac{b}{\cancel{h}}\times\frac{h^{\cancel{۴}}}{۱۲} = \boxed{\frac{bh^۳}{۱۲}}$

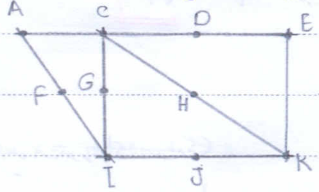


تمرین ۲ :

در شکل : (تمام میله ها ۱ متری است .)

الف) اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید .

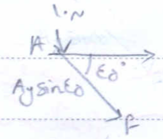
الف)



$\rightarrow EH = DH = HJ = GJ = BF = BJ = ۰$

ب) نیروی عضو AF را تعیین کنید .

ب)

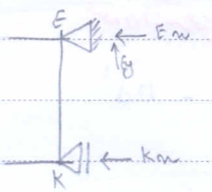


$\Sigma F_y = ۰$

$AF\sin۴۵ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow AF\,\overset{۰٫۷}{\cancel{\sin۴۵}} = ۱۰ \Rightarrow AF = \frac{۱۰}{۰٫۷} \simeq ۱۴٫۲۸$

ج) واکنش های تکیه گاهی شکل را بدست آورید .

ج)



Ⅰ $\Sigma M_E = ۰$

$-۱۰\times۴ + K_x\times۲ = ۰$

$۲K_x = ۴۰ \Rightarrow K_x = ۲۰N$

Ⅱ $\Sigma F_x = ۰$

$-K_x - E_x = ۰$

$E_x = ۲۰N$

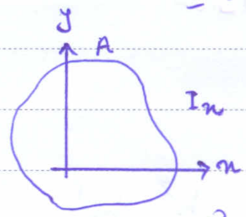
Ⅲ $\Sigma F_y = ۰$

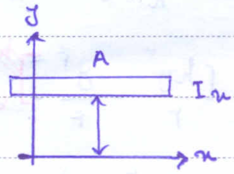
$-۱۰ + F_y = ۰$

$E_y = ۱۰N$

شعاع ژیراسیون :

مساحت A را که ممان دوم آن نسبت به محور x برابر I است، را در نظر بگیرید. فرض کنید این مساحت در نوار نازکی موازی محور x های داده شده است. این مساحت A که به این طریق جای داده شده است همان ممان دوم I را نسبت به محور x دارا باشد، این نوار باید در فاصله‌ی k_x از محور x ها باشد. k_x از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :



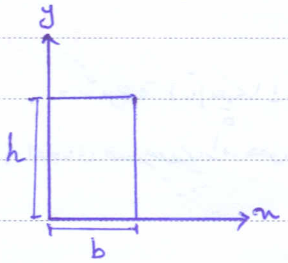


شعاع ژیراسیون ← $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

I_x → (ممان اینرسی نسبت به محور x)

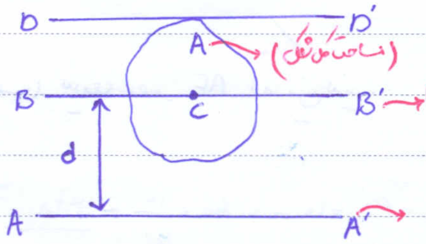
A → (مساحت کل شکل)

مثال : برای مستطیل نشان داده شده در شکل زیر شعاع ژیراسیون را نسبت به قاعده‌اش بدست آورید.



$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{3}}{\frac{bh}{1}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\cancel{b}h^{\cancel{3}}}{3\cancel{b}\cancel{h}}} = \sqrt{\frac{h^2}{3}} = \boxed{\frac{h}{\sqrt{3}}}$$

قضیه محورهای موازی :



A → (مساحت کل شکل)

B' → (محور عبوری از مرکز ثقل)

A' → (محور مورد نظر)

$$I_{AA'} = I_{BB'} + Ad^2$$

$$* \quad I = \bar{I} + Ad^2$$

d^2 → (فاصله مرکز ثقل تا محور مورد نظر)

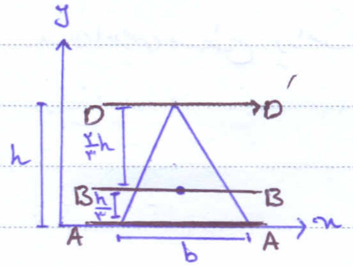
A → (مساحت کل شکل)

I → (ممان اینرسی نسبت به محور مورد نظر)

$\bar{I}$ → (ممان اینرسی نسبت به محور عبوری از مرکز ثقل)

$$* \quad \bar{I} = I - Ad^2$$

مثال ۴: ممان دوم سطح زیر را نسبت به محور 'BB و 'DD بیابید.



$$I_{AA'} = \frac{bh^{۳}}{۲} \rightsquigarrow$$ (ممان اینرسی مثلث نسبت به محور 'AA)

①

$$I = \bar{I} + Ad^{۲} \rightsquigarrow \bar{I} = I - Ad^{۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{bh^{۳}}{۱۲} - \frac{bh}{۲} \times \Big(\underset{\frac{h^{۲}}{۹}}{\cancel{\frac{h^{۲}}{۳^{۲}}}}\Big) \rightsquigarrow \frac{bh^{۳}\times۳}{۱۲\times۳} - \frac{bh^{۳}\times۲}{۱۸\times۲} \Rightarrow \boxed{\frac{bh^{۳}}{۳۶}}$$

$$\boxed{I_{BB'} = \frac{bh^{۳}}{۳۶}} \ *$$

②

$$I = \bar{I} + Ad^{۲} \rightsquigarrow I_{DD'} = I_{BB'} + Ad^{۲}$$

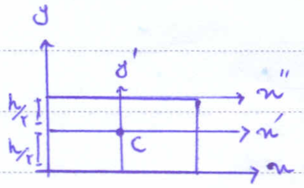
$$\Rightarrow I_{DD'} = \underbrace{\frac{bh^{۳}}{۳۶}}_{\text{ممان نسبت به مرکز سطح}} + \underbrace{\Big(\frac{bh}{۲}\Big)}_{A} \times \underbrace{\Big(\cancel{\frac{۲}{۳}h}\Big)^{۲}}_{d^{۲}}$$

$$\Rightarrow I_{DD'} = \frac{bh^{۳}}{۳۶} + \Big(\frac{bh}{۲}\Big) \underset{\text{ضرب}}{*} \Big(\frac{۴h^{۲}}{۹}\Big) \Rightarrow \frac{۱bh^{۳}}{۳۶} + \frac{۴\times bh^{۳}\times۲}{۱۸\times۲} = \frac{\cancel{۹}bh^{۳}}{\cancel{۳۶}\,۴} = \boxed{\frac{bh^{۳}}{۴}}$$

$$\boxed{I_{DD'} = \frac{bh^{۳}}{۴}} \ *$$

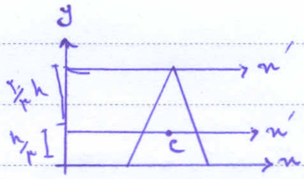
نکته: $I_{DD'}$ را نمی‌توان مستقیماً از $I_{AA'}$ بدست آورد، از قضیه محورهای موازی فقط زمانی می‌توان استفاده برد که یکی از دو محور موازی از مرکز سطح بگذرد.

جمع بندی: ممان اینرسی سطوح زیر نسبت به محورهای عبوری از آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.



$$I_{x,x''} = \frac{bh^{۳}}{۳}$$

$$I_{x'} = \frac{bh^{۳}}{۱۲}$$

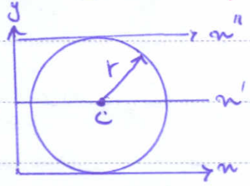


$$I_{x} = \frac{bh^{۳}}{۱۲}$$

$$I_{x'} = \frac{bh^{۳}}{۳۶}$$

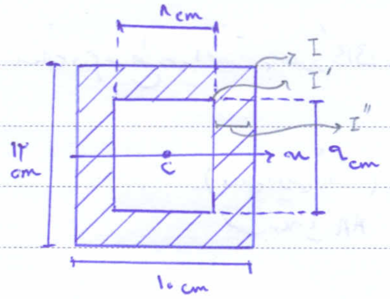
$$I_{x''} = \bar{y} + Ad^{۲}$$

$$= I_{x} + Ad^{۲}$$



$$I_{x} = \frac{\pi r^{۴}}{۴}$$

مثال: ممان اینرسی سطوح زیر را نسبت به مرکز سطح بیابید:



۱- مرکز سطح را پیدا کنید (در مستطیل وسط است) ← $I_x = \frac{bh^۳}{۱۲}$

۲- قسمت های مختلف را به ترتیب نامگذاری کنید.

I ممان مستطیل بزرگ

I' " " کوچک

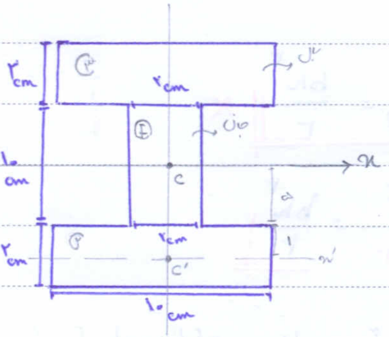
I'' " " هاشور خورده $\Rightarrow \underline{I'' = I - I'}$

$$I'' = I - I' \Rightarrow \frac{bh^۳}{۱۲} - \frac{b'h'^۳}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰ \times (۱۲)^۳}{۱۲} - \frac{۸ \times (۹)^۳}{۱۲} = \frac{۱۷۲۸۰ - ۵۸۳۲}{۱۲} = \frac{\cancel{۱۱۴۴۸}}{\cancel{۱۲}} \Rightarrow ۹۵۴$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I'' = ۹۵۴}}$$

مثال: ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح را بیابید:



۱- مقطع I شکل ← بال / جان

۲- در شکل ۲ و ۳ ممان اینرسی را نسبت به مرکز خودشان بدست می‌آوریم سپس نسبت به مرکز اصلی شکل.

۳- ۲ و ۳ شرایط یکسانی دارند پس ممان یکی را فقط بدست آورده سپس در ۲ ضرب کنیم.

$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳ \longrightarrow I = ??$$

Ⓘ $I_۱ = \frac{bh^۳}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲ \times ۱۰^۳}{۱۲} \simeq ۱۶۶,۶۷$

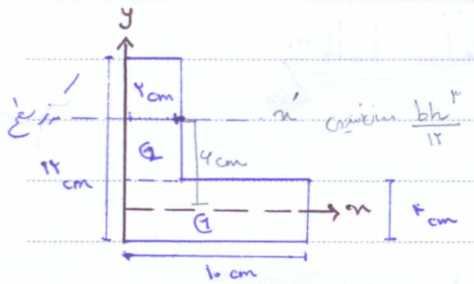
Ⓘⅰ $I_{۲,۳} = \bar{I}_۲ + Ad^۲$

$$= \frac{bh^۳}{۱۲} + Ad^۲ \Rightarrow \overset{۶,۶۶}{\frac{۱۰ \times ۲^۳}{\cancel{۱۲}}} + \overset{۷۲۰}{\cancel{۲۰ \times (۶)^۲}} = ۶,۶۶ + ۷۲۰ = ۷۲۶,۶۶$$

Ⓘⅱ $I = I_۱ + I_۲ + I_۳$

$$I = ۱۶۶,۶۷ + \overset{۱۴۵۳,۳۲}{\cancel{(۷۲۶,۶۶ \times ۲)}} = ۱۶۱۹,۹۹$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را نسبت به محور x بیابید.


y
۲cm
مرکز سطح
x′
G
۴cm
۱۲cm
G
x
۴cm
۱۰ cm
ممان اینرسی $\frac{bh^۳}{۱۲}$

$$I_x = \underbrace{\frac{۱۰\times۴}{۱۲}}_{\bar I_x} + \underbrace{\frac{۲\times۸^۳}{۱۲}}_{\bar I_x} + \underbrace{۲\times۸}_{a} \times \underbrace{۶^۲}_{d^۲} =$$

$$\Rightarrow I_x = ۵۳٫۳ + ۸۵۳ + ۵۷۶ = \underline{۷۱۴٫۶\ cm^۴}$$

* واحد ممان اینرسی ← $cm^۴$

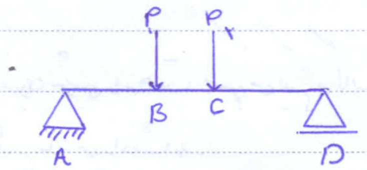
* $\underline{I_x = \bar I_x + Ad^۲}$

فصل هفتم: تیرها

- انواع مختلف بارگذاری بر تیرها

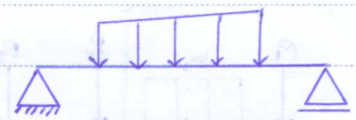
- تیر یک عضو ساختمانی است که برای تحمل بارهای وارده بر نقاط مختلف طول خود طراحی می‌شود. در اغلب موارد بارها بر محور تیر عمودند و فقط برش و خمش را در تیر به وجود می‌آورند.

۱- بار متمرکز:

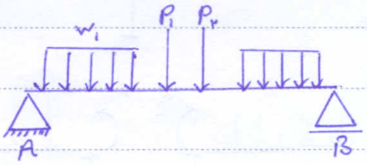


$W = N.M$
$P = N$ } *

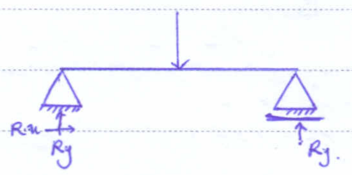
۲- بارگذاری گسترده:



۳- بارگذاری ترکیبی:

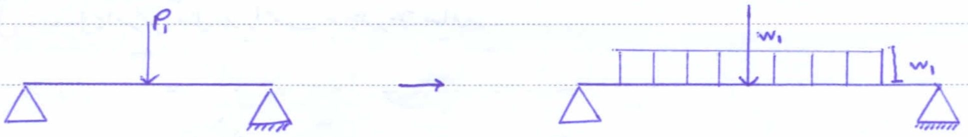


یادآوری: واکنش‌های تکیه‌گاهی:



$\Sigma M_B = ۰$ $\Sigma F_y = ۰$ $\Sigma F_x = ۰$

نکته :

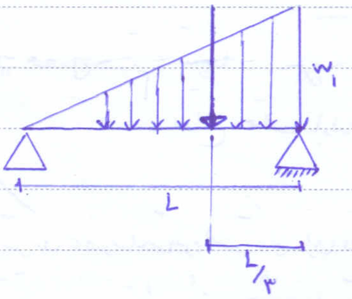


$$w_1 = \frac{P_1}{L} \Rightarrow P_1 = w_1 L$$

بار نقطه‌ای = مساحت منطقه بارگذاری گسترده = $w_1 L$

(طول x عرض)

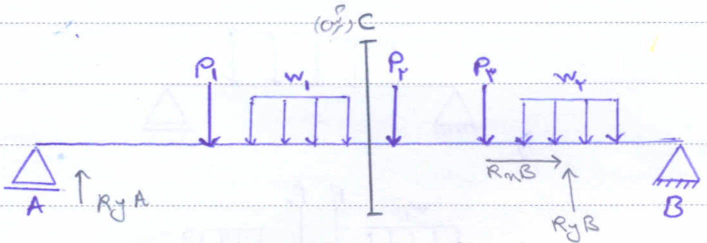
مثال :

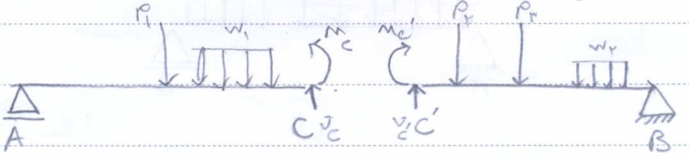


$$\Rightarrow P = \frac{w_1 L}{۲}$$

نیروهای داخلی :

* نکته : در نقطه‌ی برش خورده، در نقطه‌ی تیر، نیروی برشی را به جهت رسم می‌کنیم که لنگر ساعتگرد را حول تکیه‌گاه آن جسم ایجاد کند و لنگر نیز طوری وارد می‌شود که تار بالای مقطع بالایی را فشار دهد.


C (برش)
P_1
w_1
P_2
P_3
w_2
A
R_yA
R_xB
R_yB
B


P_1
w_1
M_c
M_c'
P_2
P_3
w_2
A
C V_c
V_c C'
B

* هر نقطه که بالای تیر است با تنش‌های خارجی می‌شود.

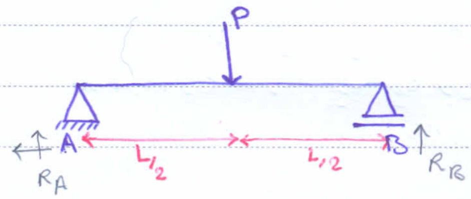
* نیروهای داخلی هم برابر برش تیر در برش قرار دارد.

* مراحل محاسبه تیر ← ۱- نیروهای محوری با زاویه به صورت تام ۲- نیروهای برشی ۳- لنگر

مثال) نمودارهای برش و لنگر خمشی تیر زیر را حل کنید (خ مهم)

تغییرات برش در طول تیر

① بدست آوردن واکنش های تکیه گاهی ⇐



Ⅰ $\sum M_A = 0$

$-R_B \times L + P \times \frac{L}{2} = 0$

$R_B \times L = \frac{PL}{2} \Rightarrow R_B = \frac{P\cancel{L}}{2\cancel{L}} = \frac{P}{2}$

Ⅱ $\sum F_{xA} = 0$

$F_{xA} + 0 = 0 \rightarrow R_{xA} = 0$

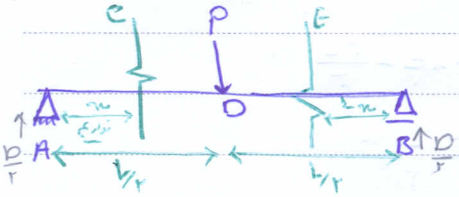
Ⅲ $\sum F_y = 0$

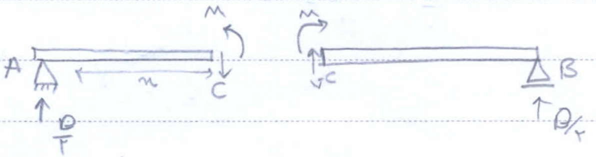
$R_{Ay} + R_B - P = 0$

$R_{Ay} + R_B = P \Rightarrow R_{Ay} + \frac{P}{2} = P$

$R_{Ay} = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$

* در برش و لنگر خمشی چون متقارن است
اینجا نیمه کافی است





$\sum F_y = 0 \qquad \frac{P}{2} - V = 0$

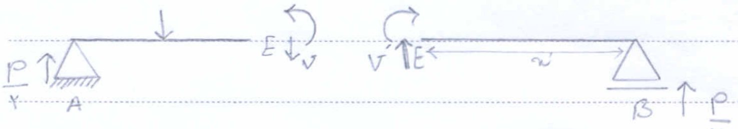
$P/2 = V_C$

تا نقطه لنگر طول C

$\sum M_C = 0$

$P/2 \times (x) - M_C = 0$

$M_C = \frac{P}{2} x$



* راست نیروهای تغییری دارد و جلو سمت راست *

Ⅰ $\sum F_y = 0 \qquad \frac{P}{2} + V_E = 0 \qquad V_E = -P$

Ⅱ $\sum M_E = 0 \qquad -\frac{P}{2} \times (L - x) + M'_E = 0 \qquad \frac{P}{2}(L - x) = M'_E$

که تقارن ظاهری و لنگر دارد.

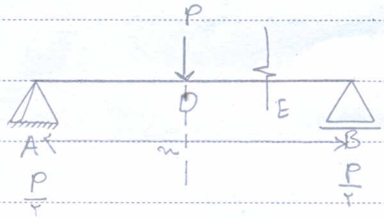
ادامه سؤال صفحه ۴۰

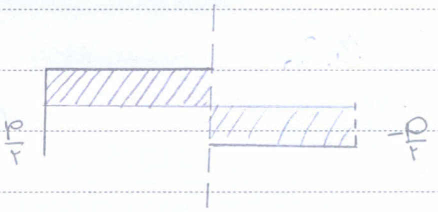
P4PCO

۱۳۹۱

$$\begin{cases} V_C = \frac{P}{2} & M_C = \frac{P}{2}x \\ V_E = -\frac{P}{2} & M_E = \frac{P(L-x)}{2} \end{cases}$$

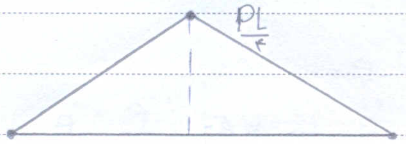
* نمودار برش لنگر تغییرات نیروی برشی در طول تیر





$x = L$

* نمودار برش



لنگر در نقطه‌ی C $= M_C = \frac{P}{2}c$

* نمودار لنگر

$x = \frac{L}{2}$ $\frac{P}{2} = x$

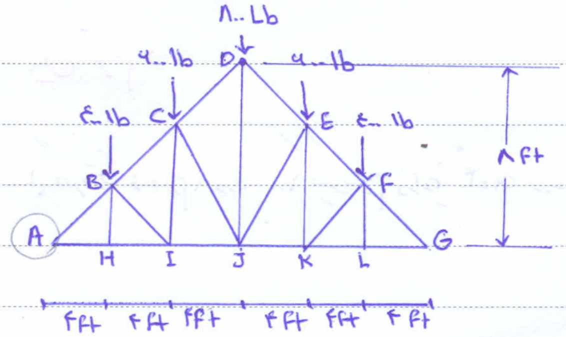
$$\begin{cases} M_D = \frac{P}{2}x = \frac{P}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{PL}{4} \\ x = \frac{L}{2} \quad M'_E = \frac{P(L-x)}{2} \end{cases}$$

* $x = \frac{L}{2}$ $\Rightarrow$ $M'_E = \frac{P(L-\frac{L}{2})}{2} \Rightarrow \frac{P(L-L)}{2} =$

$x = L$

1cm ۱۰ mm
n ۴۰

۱ ۱۰۰
۴

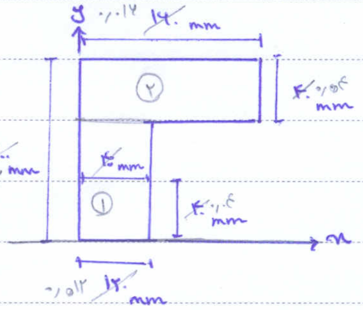

۸۰۰ Lb
۶۰۰ lb
۶۰۰ lb
۴۰۰ lb
۴۰۰ lb
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
۸ft
۴ft
۴ft
۴ft
۴ft
۴ft
۴ft

۲، مجموع گشترهای نیروها را در نقطهٔ A محاسبه نمایید.

$$M_A = (\overset{۱۶۰۰}{\cancel{+٤۰۰\times۴}}) + (\overset{۴۸۰۰}{\cancel{+۶۰۰\times۸}}) + (\cancel{+۸۰۰\times۱۲}) + (۶۰۰\times۱۶) + (٤۰۰\times۲۰)$$

$$= ۱۶۰۰ + ۴۸۰۰ + ۹۶۰۰ + ۹۶۰۰ + ۸۰۰۰$$

$$M_A = ۳۳۶۰۰ \ \mathrm{lb/ft}$$


y
۰٫۱۲ ۱۲۰ mm
۴۰ mm ۰٫۰۴
②
۲۰۰ mm ۰٫۲
۴۰ mm
①
۴۰ mm ۰٫۰۴
x
۰٫۰۱۲ ۱۲۰ mm

۳، ممان اینرسی مقطع زیر را نسبت به محور x محاسبه نمایید.

$$I_1 = \frac{bh^3}{3} = \frac{۱۲۰\times(۱۶۰)^3}{۳} = \frac{\overset{۰٫۱۲}{\cancel{۱۲۰}}\times\overset{۴٫۰۹۶}{\cancel{۴۰۹۶۰۰۰}}}{۳} = \underline{۱۶۳٫۸۴}$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{3} + Ad^2 = \frac{۰٫۱۶\times(۰٫۰۴)^3}{۳} + (۰٫۰۶۴\times۰٫۲)$$

$$= \frac{۰٫۱۲\times\cancel{۶۴}}{۳} + ۰٫۰۰۱۲۸$$

$$= ۳٫۴۱ + ۰٫۰۰۱۲۸$$

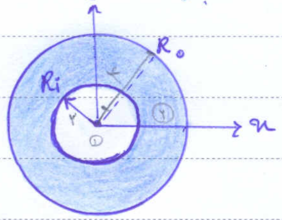
$$= \underline{۳٫۴۱۱۲۸}$$

$$I_{1,2} = ۱۶۳٫۸۴ + ۳٫۴۱۱۲۸ = \underline{۱۶۷٫۲۵۱۲۸}$$

$\overset{۱۶}{\cancel{۴\times٤}}\times\overset{۱۶}{\cancel{۴\times٤}}$

$\frac{\pi r^4}{۴}$

۴، ممان اینرسی ناحیه هاشور خورده را نسبت به محور x بیابید در صورتیکه $R_o = ۴\mathrm{cm}$ و $R_i = ۲\mathrm{cm}$ باشد.


y
x
R_o
R_i
۲
۴
①
②

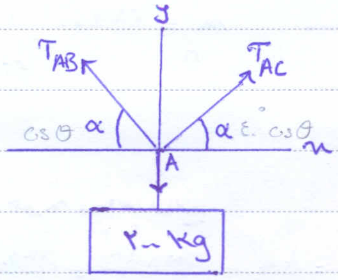
$$I_1 = \frac{\pi r^4}{۴} \Rightarrow \frac{۳٫۱۴\times(۲)^4}{۴} = ۱۲٫۵۶$$

$$I_2 = \frac{\pi r^4}{٤} \Rightarrow \frac{۳٫۱٤\times(۴)^4}{٤} = ۲۰۰٫۹۶$$

$$I_2 - I_1 \Rightarrow ۲۰۰٫۹۶ - ۱۲٫۵۶ = \underline{۱۸۸٫۴}$$

پایان ترم :

۱) اگر وزن (جرم) وزنه ۲۰۰ کیلوگرم و زاویه $\alpha = ۴۰^{\circ}$ درجه باشد، نیروهای T_{AB} و T_{AC} را محاسبه نمایید.



$\sum f_x = ۰$

$f_{ACx} \cancel{\cos ۴۰} - f_{AB} \cancel{\cos ۴۰} = ۰$

$\underline{f_{AC} = f_{AB}}$

$\sum f_y = ۰$

$-f_{y_{AB}} \sin ۴۰ \cancel{+ f_{AC}} \sin ۴۰ - (۲۰۰ \times ۱۰) = ۰$

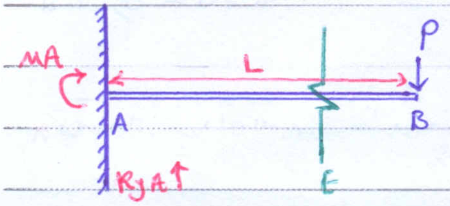
$-۲f_y \sin ۴۰ - ۲۰۰۰ = ۰$

$\cancel{-۲f_y \sin} ۴۰ = ۲۰۰۰$

$-۱٫۲f_y = \frac{۲۰۰۰}{۱٫۲}$

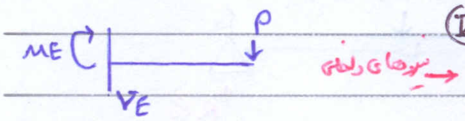
??

مثال : دیاگرام لنگر و برش تیر زیر را رسم کنید.



$$\text{I} \quad \sum F_y = 0$$

$$R_{yA} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{yA} = P}$$



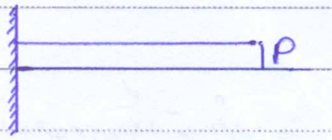
$$\text{II} \quad \sum F_y = 0$$

$$\boxed{V_E = P}$$

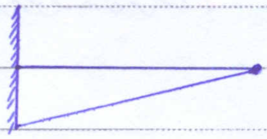
$$\text{III} \quad \sum M_E = 0$$

$$Px + M_E = 0$$

$$\boxed{M_E = -Px}$$



دیاگرام برش ←



〃 لنگر ←

$x = 0 \quad M_E = 0$

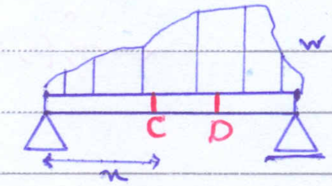
$x = L \quad M_E = -Pl$

---

* روابط میان بار ـ برش و لنگر خمشی :

* شدت بار گسترده ← w

* برش ← V



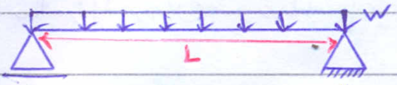
$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$$

$$V_D - V_C = -(\text{مساحت زیر منحنی بار بین نقاط } d,c)$$

$$* \quad M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \quad *$$

$$M_D - M_C = \text{مساحت زیر منحنی برش بین نقاط } d,c$$

مثال : دیاگرام نیرو و برش تیر زیر را رسم کنید.



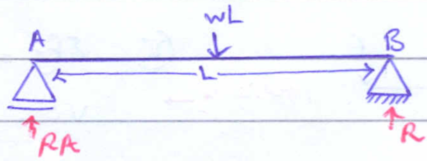
* انتگرال $dx = x$

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -xw$$

* در تیرها از نیروهای افقی صرف نظر می کنیم زیرا نیروهای محوری نداریم *

$$V = \underbrace{V_A}_{} - wx$$

واکنش تکیه گاهی در نقطه A



(I) $\Sigma M_A = 0$

$$R_B \cancel{L} = wL \times \frac{\cancel{L}}{۲}$$

$$R_B = \frac{wL}{۲}$$

(II) $\Sigma F_y = 0$

$$R_A + R_B - wL = 0 \Rightarrow \frac{wL}{۲} + R_A - wL = 0$$

$$R_A - \frac{wL}{۲} = 0$$

$$\boxed{R_A = \frac{wL}{۲}}$$

* اگر بارگذاری به صورت گسترده باشد،

نمودار برش، خطی می شود *

$$\Rightarrow V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = \underbrace{V_A}_{} - wx \Rightarrow \frac{wL}{۲} - wx \longrightarrow \boxed{V = w\left(\frac{L}{۲} - x\right)}$$

برش یا واکنش تکیه گاهی A

A : $x = 0$

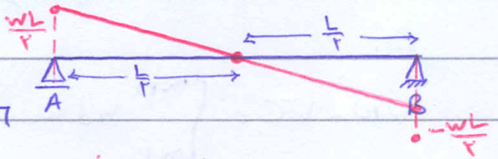
$V_A = \frac{wL}{۲}$

C : $x = \frac{L}{۲}$

$V_C = 0$

B : $x = L$

$V_B = \frac{-wL}{۲}$

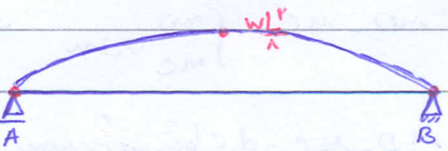


دیاگرام برش ←

(تکیه گاه مفصلی لنگر ندارد)

$$\Rightarrow M - \cancel{M_A} = \int_0^x V\,dx \Rightarrow \int_0^x w\left(\frac{L}{۲} - x\right)dx \Rightarrow \boxed{\frac{w}{۲}\left(Lx - x^۲\right)}$$

(از قسمت بالا داریم)



A : 0

C : $\frac{w}{۲}\left(\frac{L^۲}{۲} - \frac{L^۲}{۴}\right) = \frac{w}{۲} \times \frac{L^۲}{۴} = \boxed{\frac{wL^۲}{۸}}$

B = $\frac{L}{۲}$