« بسمه تعالی »

« ایستایی ۲ »

استاد : خانم علیزاده

هنرجو : سمیه تقی زاده

دانشگاه : قدسیه ساری

ترم ۴ / نقشه کشی معماری

مباحث :

۱) نیروهای محوری و اثرات آن‌ها
۲) تنش برشی مستقیم
۳) تنش در تیرها
۴) آشنایی با تیر و خیزها
۵) طرح تیرهای فولادی
۶) ستون ها

← ایستایی ۲ یا مقاومت مصالح

استاد حل تمرین : خانم جمالی

« بهار ۱۳۹۴ »

جلسه ۱ : ایستایی ۲ (یا مقاومت مصالح ـ رشته عمران)

نیروی محوری : محاسبه سازه

دسته اول : بارگذاری ← محاسبه‌ی بارها، نیروها و لنگرهای خارجی بر سازه وارد.

« دوم : تحلیل سازه ← محاسبه‌ی بارهای داخلی وارد بر سازه.

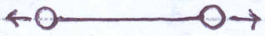
« سوم : طراحی سازه ← مقاومت مصالح

نیروی محوری ← نیرویی است که عمود بر سطح مقطع عضو وارد شود.

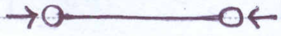
« برشی ← « « به صورت موازی (مماس) بر سطح مقطع عضو وارد می‌شود.

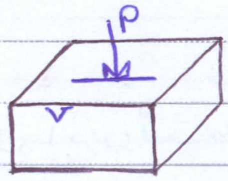
* در خرپاها تنها نیروی موجود محوری است ← * چون عضوها دو نیرویی هستند.

نیروی محوری { کششی ← اگر مقطع جسم را به سمت بیرون بکشد.



فشاری ← اگر مقطع عضو را به داخل فشار دهد.





مفهوم تنش : نیروی وارد بر سطح را گویند (stress)

تنش محوری ← $\frac{\text{نیروی محوری}}{\text{سطح}} = \frac{P}{A} = \sigma$ (سیگما)

« برشی ←

نیروهای محوری ← باعث ایجاد تغییر حجم در سازه می‌شود، تغییر شکل ایجاد می‌کند.

« برشی ← باعث ایجاد تغییر زاویه می‌گردند و تغییر شکل نمی‌شوند.

* تنش برشی = $\frac{\text{نیروی برشی}}{\text{مساحت سطح}} = \frac{V}{A} = \tau$ (تاو) ← تنش برشی

واحد تنش نیوتون بر متر مربع = پاسکال = pascal = $\frac{N}{m^2}$

* مبنا : 10^6 = برای تبدیل پاسکال به مگا پاسکال

مگا = 10^6 × پاسکال

$$Mpa = 10^6 pa = 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{N}{mm^2}$$

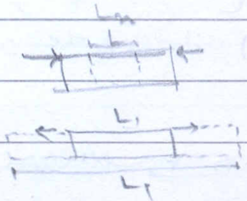
$$Mpa = \frac{N}{mm^2}$$

$$* \frac{N}{mm^2} = \frac{N}{(10^{-3})^2} = \frac{N}{10^{-6} m^2} = \frac{N}{m^2} \times 10^6$$

$1m = 1000\ mm$

$mm \times 10^{-3} \rightarrow m$

واحد تنش : ← $\frac{kg}{cm^2}$, $\overset{\text{تن}}{\frac{t}{cm^2}}$, $\overset{\text{پوند}}{\frac{lb}{in^2}}$



$\sigma_1 = \frac{-P_1}{A}$ کاهش طول = تنش فشاری = ۱

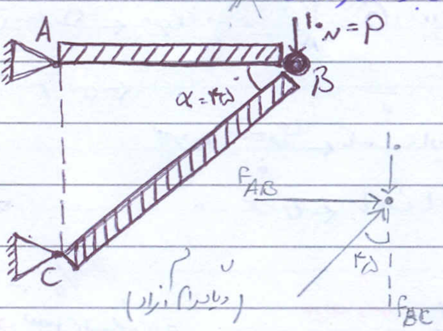
$\sigma_2 = \frac{+P_2}{A}$ افزایش طول = " کششی = ۲

* تنش محوری (متوسط) ← $\sigma = \frac{P}{A}$

به همین تنش محوری متوسط است چون شدت اثر نیرو در همه‌ی نقاط برابر است. توزیع نیرو در سطح هم فاصله از نقطه اثر نیرو و جنس جسم بستگی دارد، هرچه جسم صلب‌تر باشد و هرچه فاصله‌ی سطح مورد نظر از نقطه اثر نیرو بیشتر باشد تنش یکنواخت است.

جلسه ۲

مثال) با فرض ثابت بودن سطح مقطع میله‌ی همین BC و تنش مجاز مساوی σ



$\sigma = 30\ pa$

$A_{BC} = ?$

$P = ?$

σ (تنش محوری) $= \frac{P}{A}$ $\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$

$\Sigma f_y = 0$

$+F_{BC} \cos 45 - 10 = 0$

نیروی محوری BC ← $F_{BC} = \frac{10}{\cos 45} = 14.14_N$

$A_{BC} = \frac{P_{BC}}{\sigma} = \frac{14.14}{30} = 0.47\ m^2$

$$* \boxed{A = \frac{P}{\sigma}}$$

* تنش موجود از تنش مجاز نباید بیشتر باشد.

$\sigma = \frac{P}{A}$ ← مفهوم تنش موجود

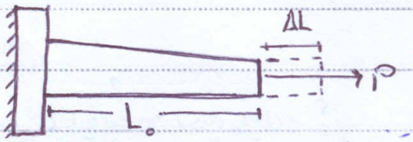
σ_{all} ← مجاز " "

* ضریب اطمینان (Safe factor): $\sigma = \frac{P \times 1{,}2}{A} < \sigma_{\text{مجاز}}$

برای پوشش عدم قطعیت ها در تنش های مجاز مصالح (تنش، خاک) از ضریب اطمینان استفاده می کنیم، در واقع با ضرب ضریب اطمینان در نیروی موجود، مقدار تنش موجود را مقداری بزرگتر از مقدار واقعی در نظر می گیریم.

* کرنش طولی:

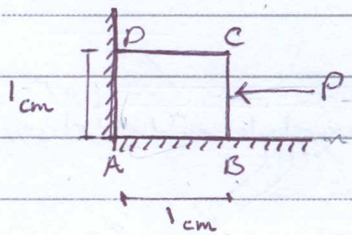
در شکل زیر یک میله ی منشوری (اپسیلون) ε، تحت اثر نیروی محوری P قرار دارد، این میله پس از اعمال بار دچار تغییر طول ΔL شده، تغییر طول میله در طول واحد کرنش طولی می نامیم.



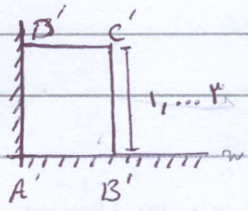
* کرنش واحد ندارد زیرا $\varepsilon = \frac{\Delta L \cancel{m}}{L \cancel{m}}$

کرنش محوری $\Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$

مثال) وجه D, C, B, A از یک مکعب واحد در شکل ۱ نشان داده شده است، در اثر نیروی P وارد بر ضلع BC، وجه ABCD به شکل ۲ در می آید. در این نقطه کرنش در راستای x، چند برابر کرنش در راستای y است؟



(شکل ۱)



(شکل ۲)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}} = \frac{0{,}999 - 1}{1} = -0{,}0001$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta L_y}{L_{0y}} = \frac{1{,}003 - 1}{1} = 0{,}0003$$

$$\underset{\text{تغییر طول}}{\Delta L} = \underset{\text{ثانویه}}{L} - \underset{\text{اولیه}}{L} = 0{,}0003$$

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{-0{,}0001}{0{,}0003}$$

* قانون هوک : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

مطابق این قانون در اثر اعمال تنش σ (سیگما) به یک ماده با رفتار خطی کرنش‌های ایجاد شده در راستای آن تنش عبارت است از :

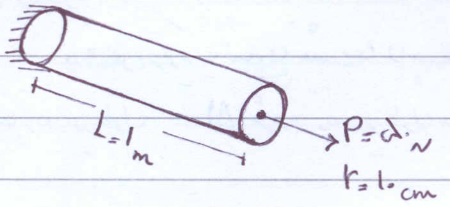
$$\underset{\text{تنش}}{\sigma} = {}^{*}E\,\underset{\text{کرنش}}{\varepsilon}$$

* E مدول الاستیسیته (مقدار آن بستگی به جنس جسم دارد)

$$\varepsilon = \sigma/E$$ ← قانون هوک

$$\varepsilon = \Delta L/L$$

مثال ۱) ستون دایره‌ای با شعاع ۱۰_{cm} و به طول ۱_m تحت تأثیر نیروی کششی ۵۰_N قرار گرفته است ، مدول الاستیسیته $E = ۲\times ۱۰^{۱۰}$.



الف) تنش قائم (تنش محوری) ایجاد شده در میله را بیابید ؟

$$\sigma = \frac{P_N}{A_{m^2}} = \frac{۵۰}{\pi(۰٫۱)^۲} = ۱۵۹۲٫۳\ pa$$

ب) تغییر طول میله (ΔL) را بیابید ؟ X

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{۱۵۹۲٫۳}{۲\times ۱۰^{۱۰}} = ۷۹۶٫۱۵\times ۱۰^{-۱۰}$$

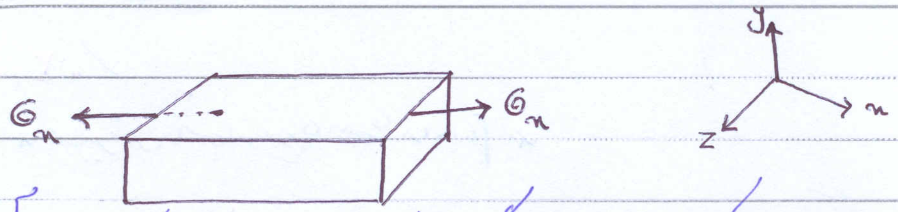
$$\underset{\text{تغییر طول}\ \hookleftarrow}{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon L \Rightarrow ۷۹۶٫۱۵\times ۱۰^{-۱}\times ۱$$

$$\Delta L = ۷۹۶٫۱۵\times ۱۰^{-۱۰}\ m$$

* بررسی اثر پواسون در یک ماده ایزوتروپ :

در شکل زیر یک مکعب مستطیل تحت تنش σ_x در راستای طولی قرار گرفته در جهت محور x ها دچار افزایش طول می‌گردد مطابق اثر پواسون این ماده در جهت x دچار افزایش طول و در جهت‌های جانبی y و Z دچار کاهش طول می‌گردد و نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی در راستای نیرو معادل ضریب پواسون آن ماده می‌باشد .

$$\underset{\text{نو}\ \hookleftarrow}{\nu} = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} = -\frac{\varepsilon Z}{\varepsilon x} = \frac{\varepsilon y}{\varepsilon x}$$ (ضریب پواسون)



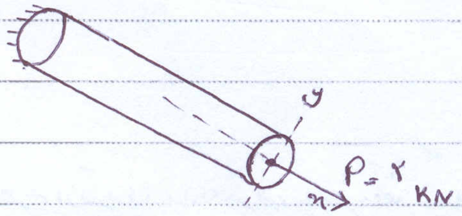
نکته: طبق قانون پواسون در اثر اعمال نیرو در یک راستا در راستاهای دیگر نیز تغییر طول به وجود می‌آید، اگر مقدار آن به ضریب پواسون بستگی داشته باشد. ضریب پواسون بر اساس جنس ماده است.

$$\text{کرنش اصلی}\quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \;\Big/\; \text{کرنش جانبی}\quad \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x \;\Big/\; \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$$

$\Rightarrow$

* کرنش اصلی بر اساس وارد شدن نیرو تعیین می‌شود.

مثال) میله‌ای با مقطع دایره با قطر ۱۰ mm از یک فولاد الاستیسیته $E = ۲\times ۱۰^{۱۱}\ \text{N.m}^{-۲}$ و $\nu = ۰٫۲۵$ ساخته شده است. این میله تحت اثر نیروی کششی دو کیلو نیوتن قرار می‌گیرد. کاهش قطر آن را بیابید.



$\varepsilon = ۲\times ۱۰^{۱۱}$

$\nu = ۰٫۲۵$

$D = ۱۰\ \text{mm} \rightarrow ۰٫۰۱\ \text{m}$

$\Delta D = ?$

$\varepsilon_{\text{قطر}} = \dfrac{\Delta_{\text{قطر}}}{L_{\text{قطر}}}$

مراحل حل

تنش $\sigma_x = \dfrac{P}{A}$

کرنش هوک $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$

پواسون $\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x$

تغییرات قطر $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta D}{D_0}$

تنش $\rightarrow \sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{۲\times ۱۰۰۰\ \text{N}}{\pi(۰٫۰۰۵)^۲} = \dfrac{۲}{\pi\times ۲۵}\times ۱۰^{۹}$

$= ۰٫۰۲۵\times ۱۰^{۹} = ۲۵\times ۱۰^{۶}$

$\sigma_x = ۲۵\times ۱۰^{۶}\ \text{pa}$

$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} = \dfrac{۲۵\times ۱۰^{۶}}{۲\times ۱۰^{۱۱}} = ۱۲٫۵\times ۱۰^{-۵}$

کرنش در راستای قطر $\varepsilon_y = -\nu\cdot\varepsilon_x = -۰٫۲۵\times ۱۲٫۵\times ۱۰^{-۵} = -۳٫۱۲۵\times ۱۰^{-۵}$

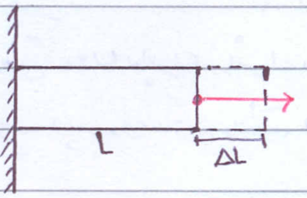
$\Delta_{\text{قطر}} \Rightarrow \dfrac{\Delta_{\text{قطر}}}{L_{\text{قطر}}} \Rightarrow (۵)\ \Delta D = D_0\times \varepsilon_y \Rightarrow -۳٫۱۲۵\times ۱۰^{-۵}\times ۰٫۰۰۱$

$= -۳٫۱۲۵\times ۱۰^{-۸}\ \text{m}$

Subject .   Date

جلسه ۳ :

* تغییر شکل ناشی از نیروی محوری در اجسام *



$$\Delta L = \frac{PL}{EA}$$

ΔL ↓ تغییر طول به ازای نیروی محوری

EA ↓ سختی جسم

*نکته: PL و ΔL رابطه مستقیم دارند ولی EA با آن دو رابطه‌ی معکوس.

مثال) فرض کنید میله‌ای زیر نیروی $P = ۱۰_{(N)}$ وارد شده، اگر میله $۱_{(m)}$ باشد و با فرض مساحت مقطع $A = ۱,۵_{(m^۲)}$ و مدول الاستیسیته $E = ۱۰^۵_{(N/m^۲)}$ باشد، تغییر طول میله را بیابید.

مفروضات

$P = ۱۰_{(N)}$

$E = ۱۰^۵_{(N/m^۲)}$

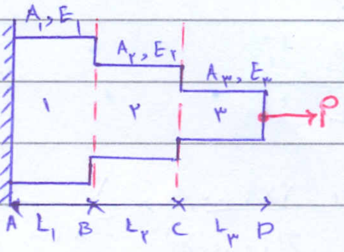
$L = ۱_{(m)}$

$A = ۱,۵_{(m^۲)}$

$\Delta L = ?$

$$\Delta L = \frac{PL}{EA} \longrightarrow \frac{۱۰ \times ۱}{۱۰^۵ \times ۱,۵} = ۶,۶۶۶۶۷e-۶$$

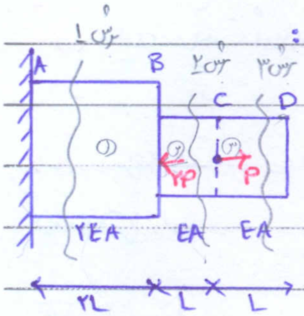
نکته: اگر مجموعه از تعدادی میله‌ی متوالی با سطح مقطع و بارگذاری‌های مختلف تشکیل شده باشد، تغییر طول کل مجموعه عبارت است از



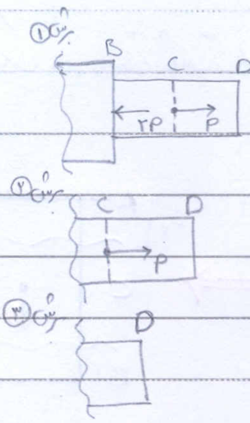
$$\boxed{\Delta L_{کل} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD}}$$

MICRO®

مثال) مجموعه‌ی مقابل تحت بارگذاری محوری مطابق شکل قرار دارد، در این مجموعه مطلوب است:


برش ۱
برش ۲
برش ۳
A
B
C
D
①
②
③
۲P
P
۲EA
EA
EA
۲L
L
L

الف) تغییر مکان نقطه‌ی D ؟


① برش
B
C
D
۲P
P
② برش
C
D
P
③ برش
D

$$F_{AB} = +P - 2P = -P$$

$$F_{BC} = P$$

$$F_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta D = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD}$$

$$\Rightarrow \Delta D = \frac{(-P)(2L)}{2EA} + \frac{PL}{EA} + 0 = 0$$

ب) تغییر فاصله‌ی بین نقاط D و B ؟

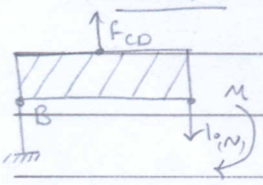
* نکته: برای بدست آوردن تغییر فاصله‌ی بین نقاط D و B، تغییر طول میله‌های بین آن‌ها را بدست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

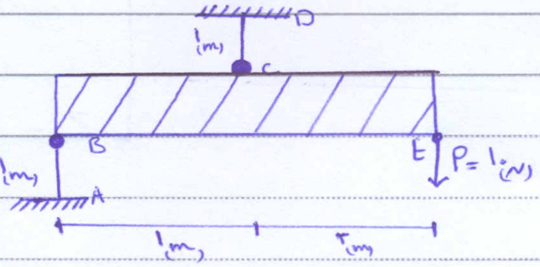
$$\Rightarrow \Delta B,D = \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD}$$

$$= \frac{PL}{EA} + 0 = \frac{PL}{EA}$$

مثال) در شکل زیر بار عمودی P در نقطه‌ی E رو به پایین اعمال می‌شود، تغییر طول میله‌ی CD را بیابید.

مرحله ①




D
1 (m)
C
B
E
$P = 10$ (N)
1 (m)
A
1 (m)
3 (m)

مرحله ②

$$\Delta L_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{(EA)_{CD}}$$

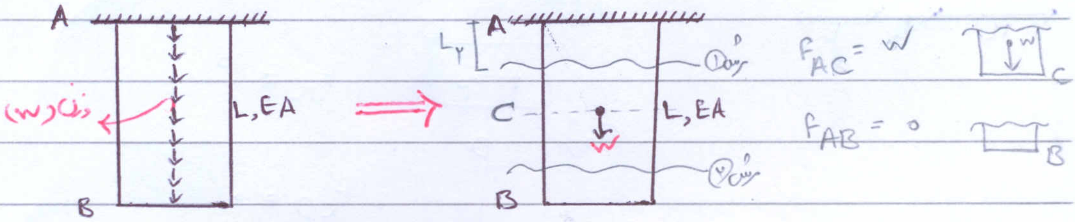
$$= \frac{30 \times 1}{2 \times 10^{5}} = 15 \times 10^{-5} \, (m)$$

$$\Sigma M_B = 10 \times 3 - F_{CD} \times 1 = 0$$

$$F_{CD} = 30 \, (N)$$

مثال) میله‌ی زیر تحت اثر وزن خود آویزان است، تغییر طول نقطه‌ی B را بیابید .

* نکته : برای بدست آوردن تغییر طول انتهای یک میله با سختی ثابت EA ، می‌توان کل بار طولی خارجی موثر آن را در وسط طول بارگذاری قرار داد .

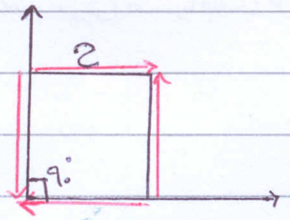

A
B
L,EA
وزن (w)
A
C
B
L_2
L,EA
w
برش ①
برش ②
$f_{AC} = w$
$f_{AB} = 0$
w
C
B

مجهول ⇒ $\Delta_B = ?$

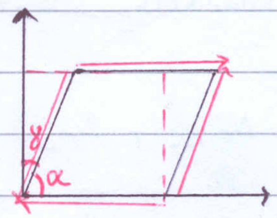
$\Delta B \Rightarrow \Delta L_{AC} + \Delta L_{BC}$

$\Delta B \Rightarrow \frac{PL}{EA} + \frac{PL}{EA} \Rightarrow \frac{wL}{2EA} + 0 = \frac{wL}{2EA}$

* تنش برشی و کرنش برشی *



(before)


γ
α

(after)

کرنش برشی : $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (گاما)

کرنش

تنش برشی :

$\tau = G\gamma$ (رتو)

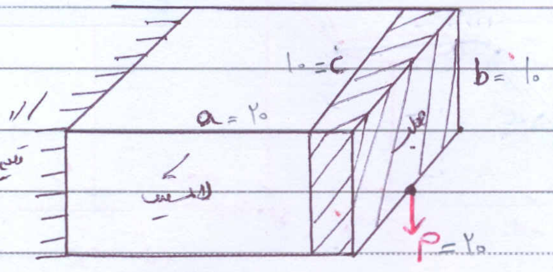
G ↓ مدول برشی

γ ↘ کرنش برشی

(،، مماسی)

$\tau = \frac{V\underline{L}P}{A}$

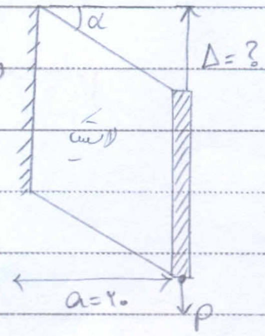
مثال) مطابق شکل یک مکعب مستطیل لاستیکی با عرض ۳۰ و مدول برشی G و از یک طرف به صفحه‌ی صلب و از طرف دیگر به تکیه‌گاه گیردار، متصل شده است. نیروی برشی P بر جسم صلب اعمال می‌شود، تغییر مکان جسم صلب در اثر تنش برشی چقدر است؟



(3D)

(فرض) G = ۵۰۰

(2D)



تنش برشی سطح صلب $\Rightarrow \tau = \frac{P\ (\text{نیرو})}{bC\ (\text{مساحت})}$

① $\tau = \frac{۲۰}{۱۰\times۱۰} = ۰٫۲\ (N/cm^{۲})$

② $\tau = G\gamma \Rightarrow ۰٫۲ = ۵۰۰\gamma$

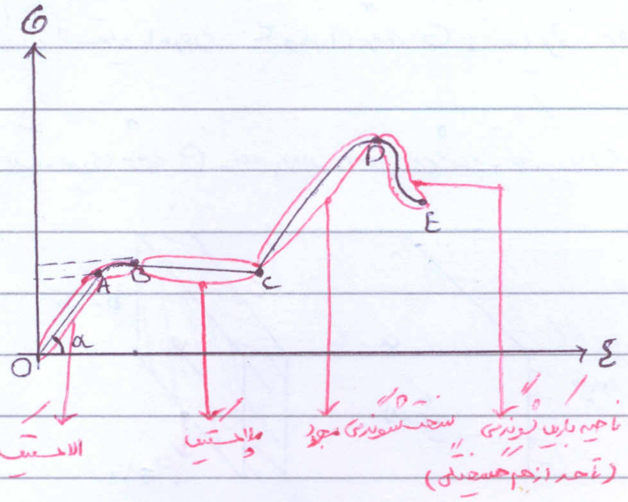
$\Rightarrow \gamma = \frac{۰٫۲}{۵۰۰} \Rightarrow ۰٫۰۰۰۴ = ۴\times۱۰^{-۴}$

③ $\tan\gamma = \frac{\Delta}{\alpha}$

$\Rightarrow \Delta = ۲۰\times\tan\gamma\ ۴\times۱۰^{-۴} = ۰٫۰۰۸\ (m)$

Subject . Date

* رفتار فولاد *



OA = خطی

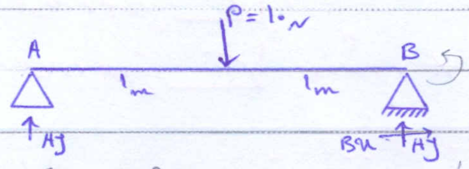
AB = غیرخطی

جلسه چهارم .

Subject: Date:

«جلسه ششم»

«مرور»


$P = ۱۰\,N$
A
B
$۱\,m$
$۱\,m$
A_y
B_x
A_y

Ⓘ $\Sigma M_B = ۰$

$A_y \times ۲ - ۱۰ \times ۱ = ۰$

$A_y \times ۲ = ۱۰$

$A_y = ۱۰/۲ = \underline{۵}$

Ⓘⓘ $\Sigma F_y = ۰$

$A_y + B_y - P = ۰$

$۵ + B_y - ۱۰ = ۰$

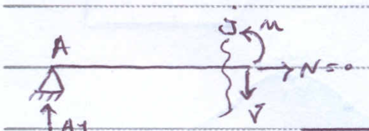
$B_y = \underline{۵}$

Ⓘⓘⓘ $\Sigma F_x = ۰$

$B_x = ۰$

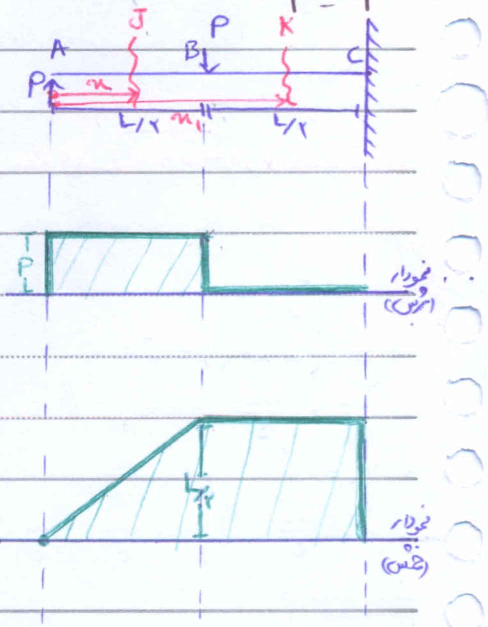
* نکته: هر وقت جسمی تعادل برقرار بود، این تعادل بر تمامی اجزای آن جسم نیز برقرار خواهد بود *

«مرور» ← انواع نیروهای موجود در یک جسم: خارجی و داخلی، نیروهای داخلی شامل: V نیروی عرضی، N نیروی محوری و M لنگر. همچنین نیروهای خارجی شامل: بارگذاری خارجی و واکنش های تکیه گاهی می باشد.

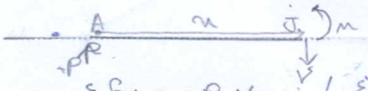


* نکته: در تیرها چون بارگذاری به صورت عمود است، نیرو در راستای x نداریم *

* رسم دیاگرام *


A
J
P
B
K
C
P
x
$L/۲$
x_1
$L/۲$
P
نمودار V (برش)
$L/۲$
نمودار M (خمش)

Ⓘ در امتداد AB:



$\Sigma F_y = +P - V = ۰$

$\underline{V = P}$

$\Sigma M_J = ۰$

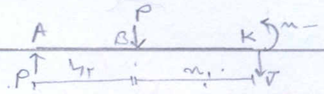
$P \times x - M = ۰$

$\underline{M = Px}$

A | $x = ۰$, $M = ۰$

J | $x = L/۲$, $M_J = PL/۲$

Ⓘⓘ در امتداد BC:


A
B
P
K
M
P
$L/۲$
x_1
V

$\Sigma F_y \Rightarrow +P - P - V = ۰$

$\underline{V = ۰}$

$\Sigma M_K = ۰$

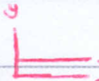
$P(L/۲ + x_1) - P \times x_1 - M = ۰$

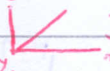
$\Rightarrow PL/۲ + \cancel{Px_1} - \cancel{Px_1} - M = ۰$

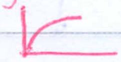
$M = PL/۲$

B | $x = L/۲$, $M = L/۲$

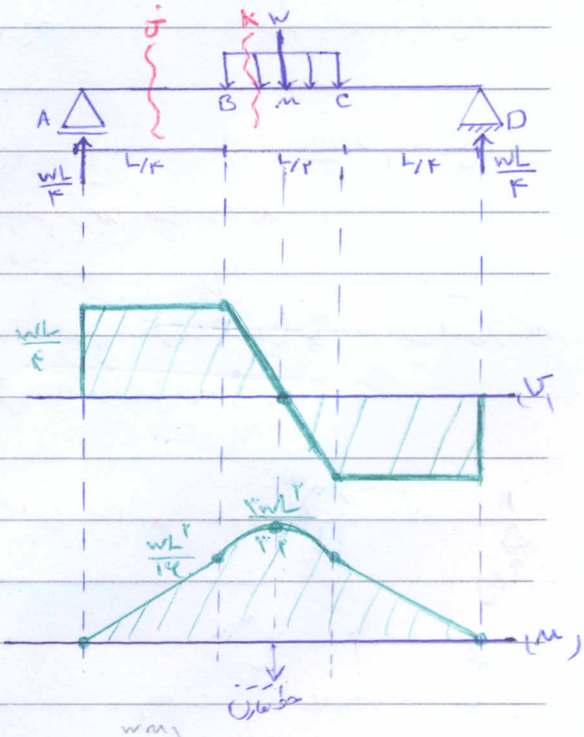
K | $x =$

* نکته : اگر در معادلات x توان یا درجه x ← صفر بود نمودار به صورت یک خط  می باشد.

اگر درجه x ← یک باشد نمودار به صورت 

اگر درجه x ← دو باشد نمودار به صورت  می باشد. *

مثال) نمودار برش و خمش برای تیر زیر را رسم کنید.

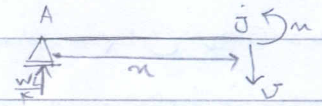


* در تیرهای متقارن در بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی می‌توان نصف تیر را تحلیل کرد *

برای تبدیل بار گسترده به متمرکز ← مقدار بار گسترده = شدت بار × طول بارگذاری

$$w\times L/2=\boxed{\frac{wL}{2}}$$

I در امتداد AB :



$$\Sigma F_y=0 \qquad \frac{wL}{4}-V=0 \qquad \boxed{V=\frac{wL}{4}}$$

$$\Sigma M_J=0 \qquad \frac{wL}{4}x-M=0$$

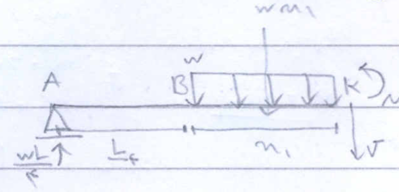
$$M=\frac{wL}{4}x$$

$$A\left|\begin{array}{l}x=0\\ M=\frac{wL}{4}\times 0=0\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}x=\frac{L}{4}\\ M=\frac{wL}{4}\times\frac{L}{4}=\frac{wL^2}{16}\end{array}\right.$$

* مقدار بار گسترده = شدت بار × طول بارگذاری

$$w\times x_1=wx_1$$

II در امتداد BK :



* برای بدست آوردن فرم نمودار به درجه x در معادله نگاه می کنیم *

$$\Sigma F_y=0$$

$$\frac{wL}{4}-(w\times x_1)-V=0$$

$$V=\frac{wL}{4}-wx_1$$

$$A\left|\begin{array}{l}x_1=0\\ M=\frac{wL}{4}\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{L}{4}\\ M=\frac{wL}{4}-\frac{wL}{4}=0\end{array}\right.$$

$$\Sigma M_K=0$$

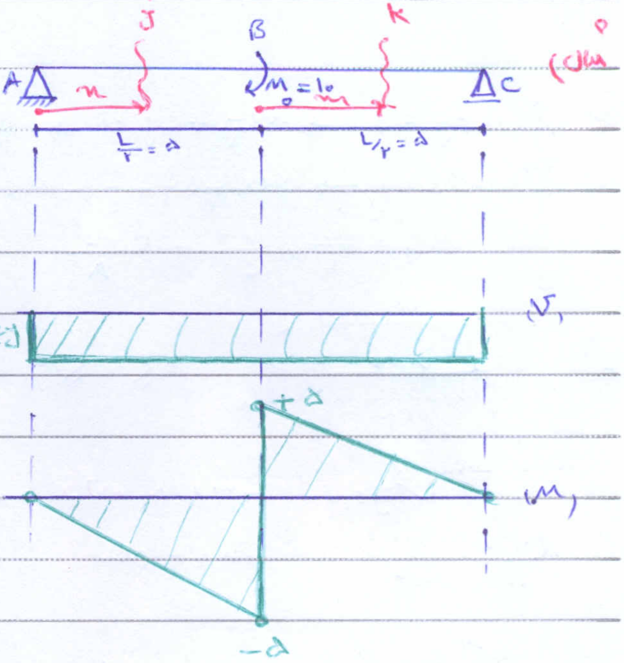
$$\frac{wL}{4}\left(\frac{L}{4}+x_1\right)-\left(M-wx_1\times\frac{x}{2}\right)=0$$

$$M=\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{8}+\frac{L}{2}x_1-x_1^2\right)$$

$$B\left|\begin{array}{l}x_1=0\\ M=\frac{wL^2}{16}\end{array}\right. \qquad M\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{L}{4}\\ M=\frac{3wL^2}{32}\end{array}\right.$$

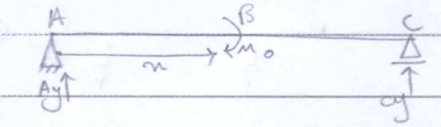
* در معادله x مقدار ۰ و L/4 را جایگذاری کردیم. *

مثال ۵)



* بارگذاری در مثال به صورت لنگری است.

Ⓘ واکنش تکیه‌گاهی: نیرو در راستای قائم را می‌توان حساب کرد زیرا هر دو طرف دو مجهول است، پس لنگر می‌گیریم.



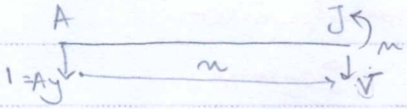
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow C_y \times L \left(\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}\right) - M_0 = 0$

← علاوه بر لنگری که به صورت متمرکز وارد می‌شود، لنگر در فاصله‌ی L نیز داریم.

$\Rightarrow L\, C_y = \frac{M_0}{L}$

$\Sigma F_y = 0 \qquad C_y + A_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y = -C_y}$

Ⓘⓘ در امتداد AB:

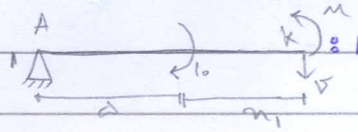


$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -1 - V = 0 \rightarrow \underline{V = -1}$

$\Sigma M_j = 0 \rightarrow 1 \times x + M = 0$

$\Rightarrow \underline{M = -x}$ $\quad A \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ M = 0 \end{array} \right. \quad B \left| \begin{array}{l} x = 5 \\ M = -5 \end{array} \right.$

Ⓘⓘⓘ در امتداد BC:



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -1 - V = 0 \rightarrow V = -1$

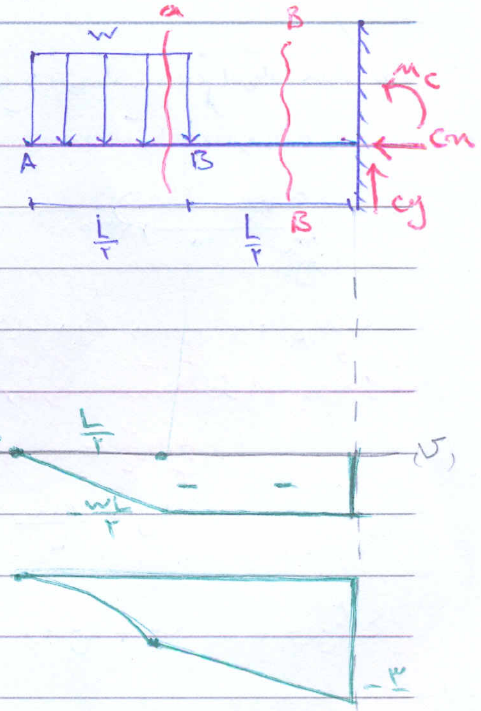
$\Sigma M_K = 0 \rightarrow 1 \times (5 + x_1) - M + 10 = 0$

$\rightarrow -5 - x_1 - M + 10 = 0$

$\rightarrow M = \underline{5 - x_1}$ $\quad B \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ M = 5 \end{array} \right. \quad C \left| \begin{array}{l} x = 5 \\ M = 0 \end{array} \right.$

* در شکل فوق لنگر متمرکز ۱۰ (نیوتن متر) در نقطه‌ی B به مجموعه وارد می‌شود. بنابراین در نمودار لنگر به اندازه‌ی ۱۰ (نیوتن متر) پرش داریم و مقدار لنگر از ۵- به صورت آنی به ۵+ تبدیل می‌شود.

تمرین : نمودارهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید .



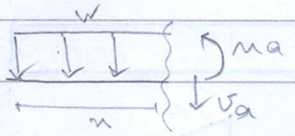
(I)

$\overset{+}{\uparrow}\ \Sigma F_y = ۰ \rightarrow -w\frac{L}{۲} + C_y = ۰ \rightarrow C_y = w\frac{L}{۲}$

$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_c = ۰ \rightarrow w \times \frac{L}{۲}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\right) - M_c = ۰$

$M_c = \frac{wL}{۲} \times \frac{۳}{۴}L = ۳\frac{wL^۲}{۸}$

(II)



$۰ \leqslant x \leqslant \frac{L}{۲}$

$\uparrow \Sigma F_y = ۰ \quad -w \times x - V_a = ۰$

x	۰	$\frac{L}{۲}$
V_a	۰	$-\frac{wL}{۲}$

$V_a = -wa$

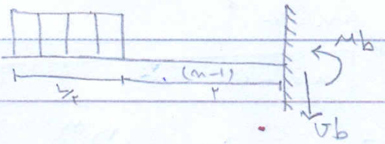
$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_a = ۰ \rightarrow -w_a \times x \times \frac{x}{۲} - M_a = ۰$

x	۰	$\frac{L}{۴}$	$\frac{L}{۲}$
M_a	۰	$\frac{wL^۲}{۳۲}$	$-\frac{wL^۲}{۸}$

$M_a = \frac{-wx^۲}{۲}$

برای اینکه بتوانیم شکل منحنی را درست رسم کنیم
یک عدد وسطی هم

(III)



$\uparrow \Sigma F_y = ۰ \rightarrow -\frac{wL}{۲} - V_b = ۰ \rightarrow V_b = \frac{-wL}{۲}$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_b = ۰ \rightarrow -\frac{wL}{۲}\left(\frac{L}{۴} + x - \frac{L}{۲}\right) - M_b = ۰$

$-\frac{wL}{۲}\left(-\frac{L}{۴} + x\right) = M_b$

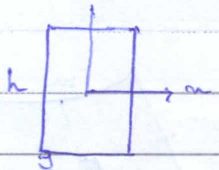
$M_b = \frac{wL^۲}{۸} - \frac{wL}{۲}x$

x	$L/۲$	L
M_b	$-\frac{wL^۲}{۸}$	$-\frac{۳}{۸}wL^۲$

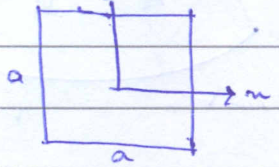
۸ جلسه هفتم /

نکات مهم در محاسبه ی مشخصات هندسی مقطع

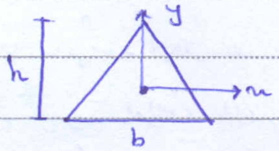
ممان اینرسی مستطیل ← $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ←



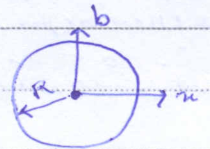
" " مربع ← $I_x = \frac{a^4}{12}$ ←



" " مثلث ← $I_x = \frac{bh^3}{36}$ ←

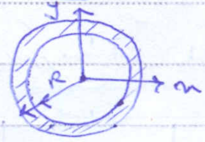


" " دایره ← $I_x = \frac{\pi R^4}{4}$ ←



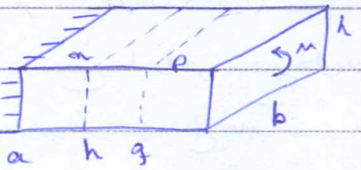
" " رینگ ← $I_x = \pi r^3 t$ ←
(حلقه نازک)

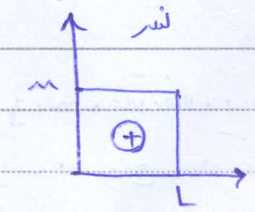
$\overset{\downarrow}{t}$ ضخامت

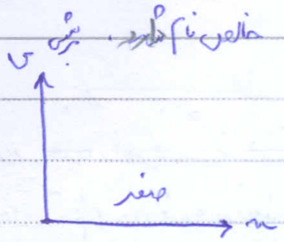


مفاهیم اولیه خمش :

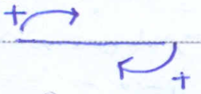
در شکل زیر تیر AB با مقطع مستطیلی تحت اثر لنگر خمشی M در نقطه ی B قرار گرفته است. در این حالت از بارگذاری در تمام مقاطع عرضی تیر، لنگر خمشی M موجود بوده و نیروهای برشی و محوری در این مقاطع صفر است. این وضعیت از بارگذاری خمش خالص نام دارد.



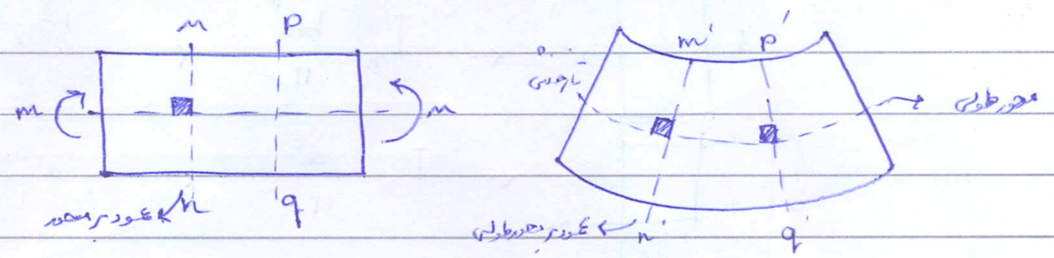




- لنگر مثبت لنگری است که تار بالا فشرده و تار پایین را می کشد. با توجه به شکل های نشان داده شده می توان به موارد زیر اشاره کرد.

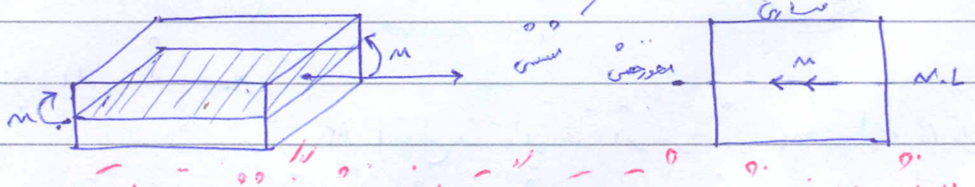


- در خمش خالص یک تیر فرض می‌شود که مقاطع عمود بر محور طولی مانند (p.q و m.n) پس از بارگذاری نیز عمود بر محور طولی تیر و به صورت مسطح باقی می‌مانند این موضوع اثر موضوع فرض اساسی خمش در یک تیر نام دارد. (تئوری اولر برنولی)



- همان‌طور که در شکل فوق دیده می‌شود تارهای بالا (mp) تحت فشار قرار گرفته و کاهش طول می‌دهند و تارهای پایینی مانند (nq) تحت کشش قرار گرفته و افزایش طول می‌دهند. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تاری وجود دارد که اندازه‌ی آن ثابت و تغییر طول نمی‌دهد. مکان هندسی این تارها در شکل زیر تشکیل صفحه‌ی خنثی را داده و محل تقاطع این صفحه با مقطع عرضی را محور خنثی یا تار خنثی می‌نامند.

- تار خنثی در مقاطع متقارن همان مرکز سطح است ولی در مقاطع مرکب مکان تار خنثی باید محاسبه گردد

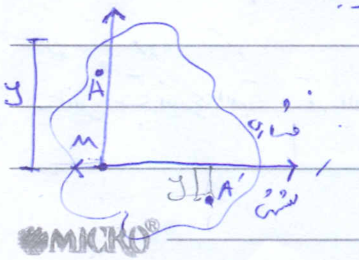


تذکر: تنش‌های تار بالا را معمولاً از نوع فشاری و مثبت است ولی اگر در پایین باشد و در کششی منفی است.

← از کجا بفهمیم؟

خمش ساده (تک محوره)

- مقطع دلخواهی با محورهای اصلی y و x مطابق شکل در نظر بگیرید، هرگاه لنگر خمشی در راستای یکی از محورهای اصلی وارد شود در مقاطع حالت خمش ساده یا تک محوره رخ می‌دهد. تنش‌های قائم ایجاد شده در نقاط مختلف در حالت خمش ساده از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه می‌باشد.



$$\sigma_A = \frac{My}{I}$$

تنش قائم ناشی از لنگر ←

لنگر

فاصله‌ی قائم نقطه تا محور

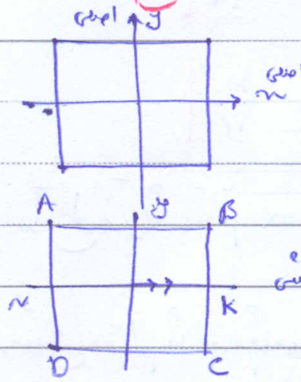
ممان اینرسی

لنگر خمشی وارد بر مقطع حول محور x است

فاصله‌ی قائم نقطه از محور xها

ممان اینرسی حول محور اصلی موازی لنگر خمشی

نکته: تنش ها از فرمول بدست می آید σ محورهای اصلی محورهایی هستند که از مرکز سطح می گذرند.



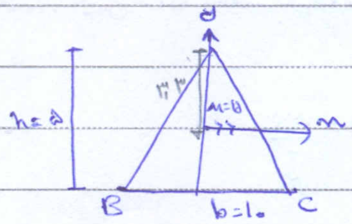
- اگر خمش در راستای محورهای اصلی وارد شود خمش تک محوره و در غیر این صورت خمش دو محوره است.

$\sigma_A > 0$ کششی $\sigma_D < 0$ فشاری $\sigma_K = 0$

$\sigma_B > 0$ کششی

$\sigma_C < 0$ فشاری $\sigma_N = 0$

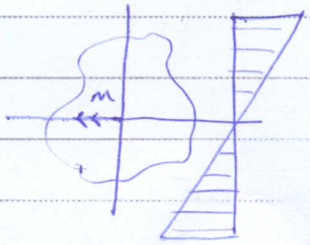
* در مقاطع مختلف در روی تار خنثی تنش قائم صفر است.



مثال) در مقطع مقابل تنش قائم در نقطه‌ی A را بیابید.

$$\sigma_A = \frac{My}{I} \qquad \sigma_A = \frac{15 \times 2/3 \times 5}{}$$

$$I = \frac{bh^3}{36} , \frac{10 \times 5^3}{36} = 34.72 \qquad \sigma_A = \frac{15 \times 3.3}{34.72} = 1.42$$



* نکات مهم خمشی:

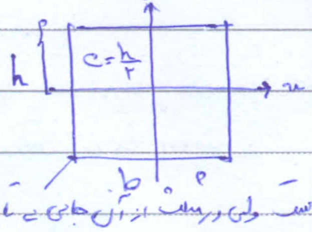
۱- در محل تار خنثی تنش قائم صفر است.

۲- در دورترین فاصله از تار خنثی به دلیل max بودن مقدار y تنش قائم σ نیز max است.

* اساس مقطع (S)

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{M}{S} \rightarrow S = \frac{I}{y}$$

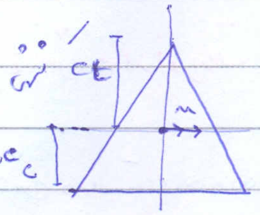
اساس مقطع ← $S = \frac{I}{C}$



C = دورترین نقطه فاصله از تار خنثی = y max

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

- در مقطع مستطیل اساس مقطع برای حالت متقارن کششی بسیار بوده برابر $\frac{bh^2}{6}$ است ولی در حالتی که از آن جایی که تار خنثی از وسط مقطع عبور نمی کند لذا اساس مقطع برای جهت های فشاری و کششی متفاوت است.

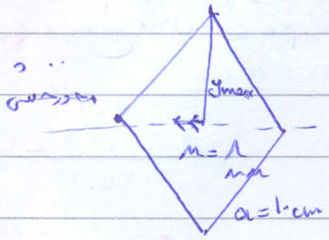


$$S_{t\,\text{کششی}} = \frac{I}{c_t} = \frac{\frac{bh^۳}{۳۶}}{\frac{۲}{۳}h} = \boxed{\frac{bh^۲}{۲۴}}$$

$$S_{c\,\text{فشاری}} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^۳}{۳۶}}{h/۳} = \boxed{\frac{bh^۲}{۱۲}}$$

مثال) در مقطع زیر تنش قائم Max را بیابید.

نکته: در مقاطع منتظم مثل مربع تمامی محورهای عبوری از مرکز محورهای اصلی به حساب می‌شوند خمش در این مقطع همواره خمش ساده محسوب می‌شود و تار خنثی بر محور خمش منطبق است.



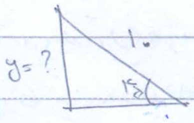
$\sigma_{max} = ?$ کشش $\quad \sigma = \frac{My}{I}$

$$\sigma = \frac{۸ \times ۱۲ \times ۵\sqrt{۲}}{۱۰^۴}$$

$$I = \frac{a^۴}{۱۲} = \frac{۱۰^۴}{۱۲}$$

$$= \sigma = ۵۷۶ \times ۱۰^{-۴}$$

??



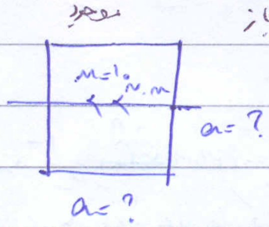
$$\sin ۴۵ = y/۱۰ \rightarrow y = ۱۰ \sin ۴۵ = \boxed{۵\sqrt{۲}}$$

*** اصول اولیه طراحی تیرها :**

در طراحی تیر مقطع باید طوری انتخاب شود که مقادیر تنش های قائم ایجاد شده از مقادیر تنش های مجاز کمتر باشد.

$$\underset{\text{موجود}}{\sigma_{max}} < \underset{\text{مجاز}}{\sigma_{all}}$$

مثال) حداکثر تنش های مجاز کششی و فشاری سازه برابر ۲۰ $N/m^۲$ را دارند
حداقل مقدار a را بیابید.



$$\sigma < \sigma_{all} = ۲۰$$

$$\frac{My}{I} < ۲۰ \Rightarrow \frac{۱۰ \times a/۲}{I} < ۲۰$$

$$\frac{\frac{۱۰ \times a}{۲}}{\frac{a^۴}{۱۲}} = ۲۰ \rightarrow \frac{۱۰ \times a \times ۱۲}{۲a^۴} = ۲۰ \rightarrow ۱۰ \times a \times ۱۲ \times ۱ = ۲۰ \times ۲ \times \cancel{a^۴}^{\,۳}$$

$$(۱۲) \quad \frac{۱۲۰}{۴۰} = \frac{۴۰a^۳}{۴۰} \rightarrow a^۳ = ۳$$

$$\boxed{a = \sqrt[۳]{۳}}$$

* کنترل برش در تیرها *

تنش:

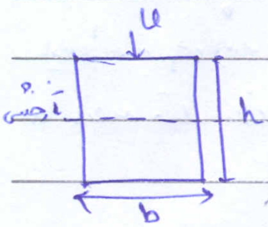
۱) نرمال:

$\sigma = \frac{P}{A}$ ← تنش محوری

$\sigma = \frac{My}{I}$ ← تنش خمشی

$$\underset{m}{\Delta L} = \frac{\overset{N}{P}\,\overset{m}{L}}{\underset{N/m^2}{E}\,\underset{m^2}{A}}$$

۲) برشی ← $\tau = \frac{V}{A}$ متوسط - میانگین



۳) تنش برشی $\tau = \frac{VQ}{It}$ در هر نقطه‌ای که می‌خواهیم بدست می‌آوریم - max

$\tau = \frac{VQ}{It}$

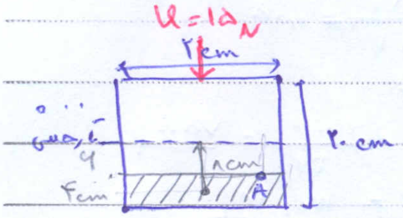
V ← نیروی برشی وارد شده به مقطع

(Q) ممان استاتیک مقطع قسمتی که از آن نقطه می‌رود جدا شود

I ← ممان ۲ مقطع

t ← ضخامت سطح برش خورده

مثال) تنش برشی در نقطه‌ی A؟



$\tau = \frac{VQ}{It}$

$\frac{۱۵ \times (۲ \times ۴ \times ۸) \times \overset{\text{تبدیل واحد}}{۱۰^{-۶}}}{۱٫۳۳ \times ۱۰^{-۵} \times ۰٫۰۲} = ?$

Q = ممان استاتیک

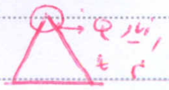
* مساحت سطح × فاصله مرکز آن سطح تا تار خنثی

$I = \frac{bh^3}{۱۲} = \frac{\overset{۲\times۱۰^{-۲}}{۰٫۰۲} \times (\overset{۸\times۱۰^{-۳}}{۰٫۲})^3}{۱۲} = \frac{۱۶ \times ۱۰^{-۵}}{۱۲} = ۱٫۳۳ \times ۱۰^{-۵}$

نکته: نقطه‌ی A هر چه به تار خنثی نزدیک‌تر شود Q بیشتر می‌شود.

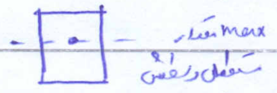
نکته: در رابطه‌ی $\tau = \frac{VQ}{It}$ تنش برشی بیشینه (max) هنگامی رخ می‌دهد نسبت $\frac{Q}{t}$ در مقطع با برش ثابت نسبت $\frac{Q}{t}$

در محل تار خنثی max می‌شود



$\tau = \frac{\boxed{V}Q}{\boxed{I}t}$ → مقدار ثابت، تاثیری ندارد.

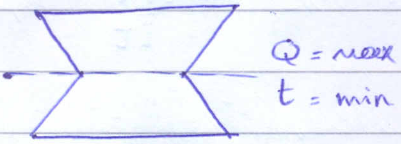
* در نقاط ابتدا و انتهای شکل مقدار تنش برشی = صفر است چون از آن نقطه نبود مساحتی وجود ندارد که جدا شود.



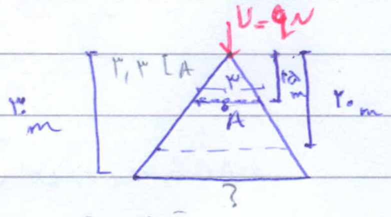
* نکته: هرچه مخرج کسری کوچک شود مقدار آن بیشتر می‌شود.
" صورت " بزرگ تر " " " بیشتر " .

* بیشترین مقدار تنش برشی در مستطیل در مرکز سطح آن قرار دارد. زیرا Q ← max برای مربع، مستطیل، دایره، مرکز سطح آن یا وسط جسم می‌باشد.

* max مقدار ممان استاتیک Q برای همه اجسام در مرکز سطح آن می‌باشد.



مثال) تنش برشی در نقطه‌ی A را بیابید.



$$Z = \frac{VQ}{It} \rightarrow \frac{۹ \times ۱۲۵,۲۵}{۷۵۰ \times ۳} = ۰,۰۵$$

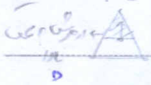
$$I = \frac{bh^3}{۳۶} = \frac{۱۰ \times (۳۰)^3}{۳۶} = \frac{۴۰۰۰۰}{۳۶} = ۷۵۰۰$$

$$Q = \frac{۳ \times ۵}{۲} \times ۲۰ - ۳,۳ = ۱۲۵,۲۵$$

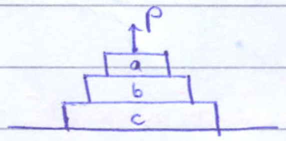
??

Q = Aȳ

فاصله‌ی مرکز سطح تا تار خنثی × مساحت قطعه‌ی بالای تار خنثی



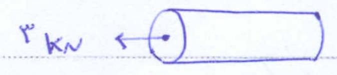
مثال) قطعه‌ای مانند شکل تحت تأثیر نیروی کششی P مطابق شکل قرار گرفته است. هرگاه نیروی P به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام نواحی A.B.C بیشتر است، چرا؟



- بیشترین گسیختگی در قطعه‌ای اتفاق می‌افتد که بیشترین مقدار تنش را دارد. طبق فرمول $G = \frac{P}{A}$

(تنش براساس نیروی محوری) max مقدار تنش در محلی اتفاق می‌افتد که کوچکترین مساحت را دارد.

مثال ۱) میله‌ی آلومینیومی به طول ۱٫۵ m تحت نیروی محوری بار محوری ۳ KN قرار می‌گیرد و نباید بیش از ۱ mm انبساط یابد و تنش قائم آن نیز نباید از ۴۰ mpa بیشتر شود. با فرض E = ۷۰ Gpa، قطر لازم میله را تعیین کنید.



قطر ΔL < ۱mm ۱mpa (تنش)

$$\Delta L \ \text{پس}\ \delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow ۱\text{-}۱ \quad ۰٫۰۰۱ = \frac{\overset{K=KN}{۳\times ۱۰۰۰}\times ۱٫۵}{۷۰\times ۱۰^{۹}\times A} \Rightarrow ۶۴۲۸$$

۷۰×۱۰^{۹} | $Gpa = Pa$ | $\times ۱۰^{۹}$

تذکر: از آن جایی که در فرمول ΔL واحد مدول الاستیسیته باید بر حسب Pa یا $N/m^{۲}$ باشد، در فرمول فوق باید عدد ۷۰×۱۰^{۹} ضرب شود تا Gpa را به Pa تبدیل کنیم.

$$\to ۱\text{-}۲ \quad ۰٫۰۰۱\times A\times ۷۰\times ۱۰^{۹} = ۳۰۰۰\times ۱٫۵$$

$$A = \frac{۳۰۰۰\times ۱٫۵}{۰٫۰۰۱\times ۷۰\times ۱۰^{۹}} = ۰٫۶۴\times ۱۰^{-۴}\ m^{۲}$$

$$۲ \quad \sigma = \frac{P}{A} \to \overset{mpa}{۴۰}\times ۱۰^{۶} = \frac{۳\times ۱۰^{۳}}{A} \Rightarrow A = ۰٫۷۵\times ۱۰^{-۴}$$

$$A = \min(\underline{\underline{۰٫۶۴}}\times ۱۰^{-۴}, ۰٫۷۵\times ۱۰^{-۴})$$ ← بیشتر را در نظر می‌گیریم

در فرمول $\sigma = \frac{P}{A}$ واحد P به N و واحد A ← $m^{۲}$ است. واحد تنش هم $N/m^{۲}$ یا Pa است در این جواب (سؤال) چون مقدار تنش مجاز را بر حسب Mpa باید $\times ۱۰^{۶}$ کنیم تا mpa به pa برسیم:

$$A = \frac{\pi d^{۲}}{۴}$$ ← مساحت بر حسب قطر

$$A = \frac{\pi d^{۲}}{۴} = \frac{۰٫۶۴\times ۱۰^{-۴}}{۱} \Rightarrow ۱\times ۳٫۱۴\times d^{۲} = ۰٫۶۴\times ۱۰^{-۴}\times ۴$$

$$d^{۲} = ۰٫۸۱\times ۱۰^{-۴}$$

$$d = ۰٫۹\times ۱۰^{-۲}$$ ← قطر لازم میله

Subject.   Date

* جلسه هم *

* ستون ها *

- ستون عضوی است که بار محوری فشاری را تحمل می کند. (در ستون تنها نیروی فشاری محسوم است).

● بار بحرانی: بار بحرانی یا P_{cr} (بدرتیقان) باری است که ستون در مرز کمانش می تواند تحمل نماید.

عوامل موثر در کمانش ستون ها:

الف) مدول الاستیسیته یا جنس جسم ← هر چه جسم سخت تر باشد، کمانش آن در بار بیشتری اتفاق می افتد.

ب) ممان اینرسی (I) ← با توجه به سطح مقطع متفاوت برای ستون ها ممان اینرسی (I) برای آن ها متفاوت است.

ج) طول ستون (L) ← هر چه طول ستون بیشتر باشد در بار کمتر یا به عبارت دیگر زودتر کمانش می کند.

* فرمول بار و تنش بحرانی در ستون ها:

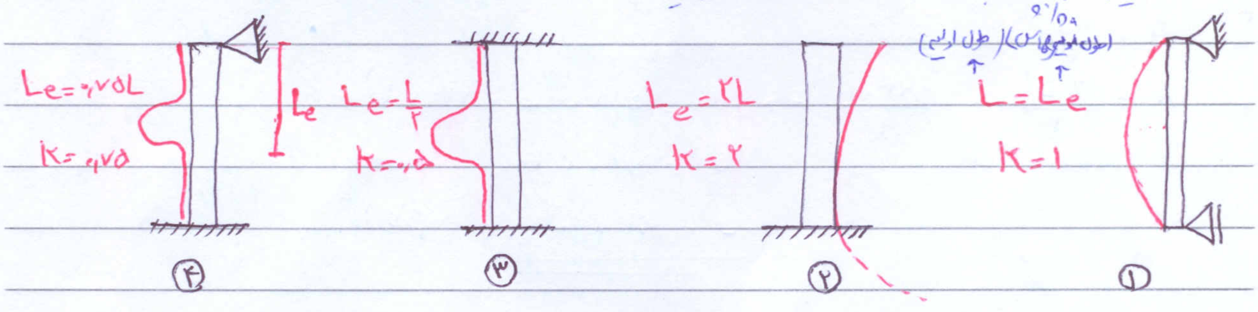
$$\underset{\text{(مقدار بار بحرانی)}}{P_{cr}} = \frac{\overset{(3{,}14)}{\pi^2}\,\overset{\text{(مدول الاستیسیته)}}{E}\,I}{(KL)^2} \rightarrow \text{(ممان اینرسی)}$$

(طول ستون) ← L | K ← (ضریب کمانش که بستگی به شرایط تکیه گاهی دارد.)

$$\underset{\text{(مقدار تنش بحرانی)}}{\sigma_{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

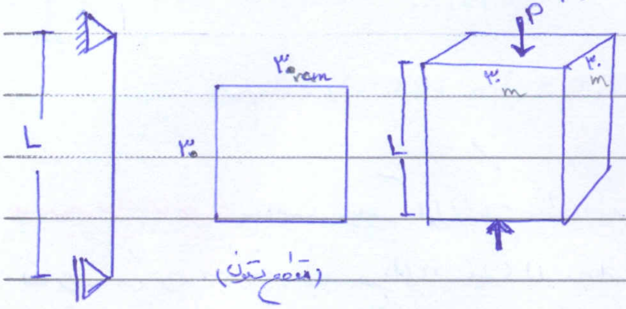
r ← (شعاع ژیراسیون $= \sqrt{\frac{I}{A}}$)

← ضریب K برای حالت های مختلف شرایط تکیه گاهی:



مثال) ستون چوبی دو سر مفصل مطابق شکل زیر می باشد. بار بحرانی را در حالت های زیر بدست آورید.

(مقدار تنش مجاز ستون $\sigma_y = ۲۴۰_{mpa}$ - مدول الاستیسیته ستون ۲۰۰ است (mpa).)



الف) طول ستون ۴۰ سانتی متر باشد.

ب) " " ۷۰ " " .

ج) " " ۱۰۰ " " .

*نکات مهم:

۱- مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند را بار بحرانی ستون می گویند.

۲- دو حالت شکست برای ستون شکل بالا ممکن است رخ دهد، که هر دوی آن باید کنترل گردد و پس در حالت کمترین مقدار بار را بعنوان بار بحرانی ستون انتخاب می کنیم.

۳- وقتی تنش را در فرمول زیر برحسب mpa وارد می کنیم، ابعاد باید برحسب mm باشد.

حل مسئله

در حالت الف

الف) حل براساس فرمول تنش نهایی: $\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma . A$

$\Rightarrow ۲۴۰ \times (۳۰۰ \times ۳۰۰) = ۲۱۶۰۰۰ (N)$

← مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند تا دچار شکست تخریب گردد.

ب) محاسبه بار کمانش ستون: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$

$\Rightarrow \frac{۳٫۱۴^2 \times ۲۰۰ \times ۶٫۷۵ \times ۱۰^4 (mm^4)}{۱ \times ۴۰۰^2 (mm)} = ۸۳۲۸۴۷ (N)$

← مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند تا دچار کمانش تخریب گردد.

$I = \frac{bh^3}{۱۲} = \frac{۳۰ \times ۳۰^3}{۱۲} = ۶٫۷۵ \times ۱۰^4 (m^4)$

* ستون دو سر مفصل است مقدار K = ۱ است. *

جواب $\Longrightarrow Min(۲۱۶۰۰۰ , ۸۳۲۸۴۷) = ۲۱۶۰۰۰$ ✓✓

در حالت ب

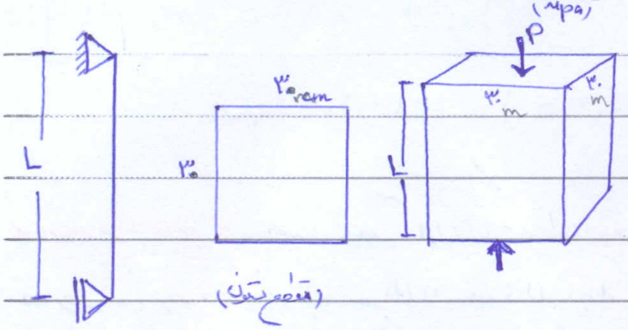
الف) مقدار تنش برابر است.

ب): $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \Rightarrow \frac{۳٫۱۴^2 \times ۲۰۰ \times ۶٫۷۵ \times ۱۰^4}{۱ \times ۷۰۰^2 (mm)} = ۲۷۱۶۴۰ (N)$

جواب $\Longrightarrow Min(۲۱۶۰۰۰ , ۲۷۱۶۴۰) = ۲۱۶۰۰۰$ ✓✓

مثال) ستون مربعی دو سر مفصل مطابق شکل زیر می باشد. بار بحرانی را در حالت های زیر بدست آورید.

(مقدار تنش مجاز ستون $\sigma_y = ۲۴۰_{mpa}$ - مدول الاستیسیته ستون ۲۰۰ (mpa) است).



الف) طول ستون ۴۰ سانتی متر باشد.

ب) " " ۷۰ " " " .

ج) " " ۱۰۰ " " " .

*نکات مهم:

۱- مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند را بار بحرانی ستون می گویند.

۲- دو حالت شکست برای ستون شکل بالا ممکن است رخ دهد که هر دوی آن باید کنترل گردد و پس در حالت کمترین مقدار بار را بعنوان بار بحرانی ستون انتخاب می کنیم.

۳- وقتی تنش را در فرمول زیر برحسب mpa وارد می کنیم، ابعاد باید برحسب mm باشد.

حل مسئله

درحالت الف

الف) حل براساس فرمول تنش نهایی: $\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma . A$

$$\Rightarrow ۲۴۰ \times (۳۰ \times ۳۰) = ۲۱۶۰۰۰_{(N)}$$

مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند تا دچار تنش تخریب گردد.

ب) محاسبه بار کمانش ستون: $P_{cr} = \frac{\pi^{۲} E I}{(KL)^{۲}}$

$$\Rightarrow \frac{۳/۱۴^{۲} \times ۲۰۰ \times ۶/۷۵ \times ۱۰^{۴}_{(mm^{۴})}}{۰/۱ \times ۴۰۰^{۲}_{(mm)}} = ۸۳۲۸۴۷_{(N)}$$

مقدار باری که ستون می تواند تحمل کند تا دچار کمانش تخریب گردد.

$$I = \frac{bh^{۳}}{۱۲} = \frac{۳۰ \times ۴۰^{۳}}{۱۲} = ۶/۷۵ \times ۱۰^{۴}_{(mm^{۴})}$$

ستون دو سر مفصل است مقدار K = ۱ است.

پس $\Longrightarrow \min(۲۱۶۰۰۰ \,,\, ۸۳۲۸۴۷) = ۲۱۶۰۰۰$ ✓✓

درحالت ب

الف) مقدار تنش برابر است.

ب) $P_{cr} = \frac{\pi^{۲} E I}{(KL)^{۲}} \Rightarrow \frac{۳/۱۴^{۲} \times ۲۰۰ \times ۶/۷۵ \times ۱۰^{۴}}{۱ \times ۷۰۰^{۲}_{(mm)}} = ۲۷۱۶۴۰_{(N)}$

پس $\longrightarrow \min(۲۱۶۰۰۰ \,,\, ۲۷۱۶۴۰) = ۲۱۶۰۰۰$ ✓✓

والف : مقدار تنش برابر است

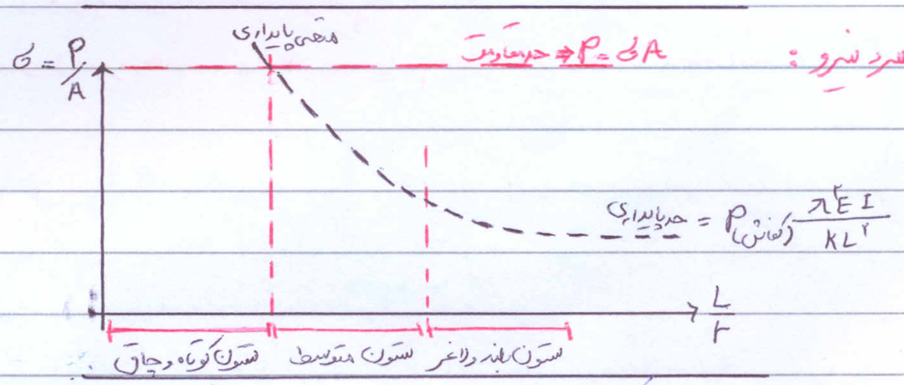
ب) : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{۳۱۴^۲ \times ۲۰۰ \times ۶۱۷۵ \times ۱۰^۴}{۱ \times ۱۰۰۰^۲} = ۱۳۳۱۰۴,۶ \ (N)$

درحالت ج.

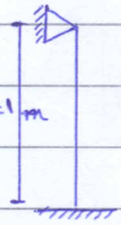
نتیجه $\Longrightarrow$ min (۲۱۴۰۰۰ , ۱۳۳۱۰۴,۶) = ۱۳۳۱۰۴,۶ ✓✓

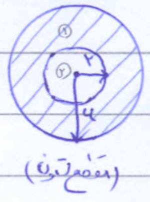
* نتیجه‌گیری نهایی : محاسبه در حالت اول زمانی که طول ستون ۴۰ cm است، ستون براساس نیروی مربوط به تنش نهایی مصالح تخریب می‌گردد. در نتیجه با افزایش طول ستون (از مقدار ۴۰ به ۷۰ سانتی‌متر در این مسئله) مقدار بار بحرانی که در اثر تنش نهایی به دست می‌آید تغییری نمی‌کند. زیرا فرمول آن $P = \sigma A$ می‌باشد که این فرمول به سطح مقطع ستون و تنش مصالح تشکیل دهنده ستون (σ) بستگی دارد. و طول ستون موثر نیست. بنابراین برای این حالت بیشترین مقدار بار تنش نهایی ستون ۲۱۴۰۰۰ (N) می‌باشد و فقط کافی است مقدار بار کمانشی ستون را بیابیم.

* نمودار عملکرد نیرو :



مثال) بار بحرانی ستون زیر را بیابید در صورتی که تنش نهایی ستون ۲۴۰ (MPa) و مدول الاستیسیته آن ۲۰۰ (GPa) باشد و مقطع ستون دارای مشخصات زیر باشد.





* دقت شود براساس واحد MPa ابعاد mm است

الف) حل براساس فرمول تنش نهایی.

ب) محاسبه‌ی بار کمانشی ستون.

الف) نیروی تنش نهایی $\Rightarrow P = \sigma A \rightsquigarrow ۲۴۰ \times ۱۰۰۴۸_{(mm^2)} = ۲۴۱۱۵۲۰ \ (N)$

ب) بار کمانشی $\Longrightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \rightsquigarrow \frac{۳۱۴^۲ \times ۲۰۰ \times ۲۵۱۲}{۰,۷۵ \times ۱۰۰۰^۲} = ۳۵۲۲۵ \ (N)$

$P_{cr} = \ ?$

$A = (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) = ۱۰۰۴۸ \ (mm^2)$

$= ((۳,۱۴ \times (۶۰)^۲) - (۳,۱۴ \times (۲۰)^۲))$

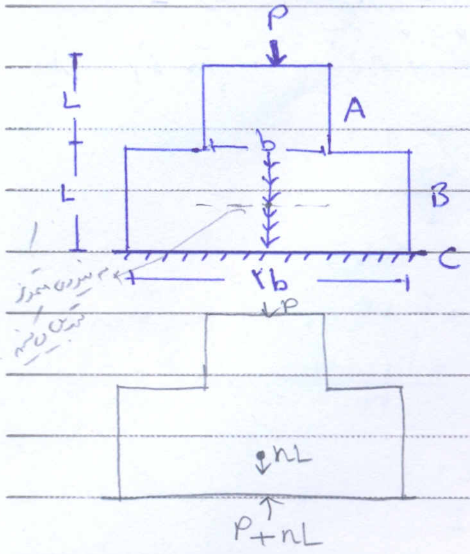
$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{۳,۱۴ (۶۰^۴ - ۲۰^۴)}{۴}$

I = ۲۵۱۲ (از فرمول رشد اشتباه نمی‌شود زیرا صفحات جداره نازک دیگر نیست)

Subject: Date:

تمرین ۱ :

۱) مقدار n را طوری بیابید که $\sigma_{AB}=\sigma_{BC}$ باشد.


P
A
B
C
L
L
b
۲b
نیروی متمرکز
P
nL
P+nL

$$\sigma_{AB}=\frac{P_{AB}}{A_{AB}}=\frac{P}{b\times L}$$

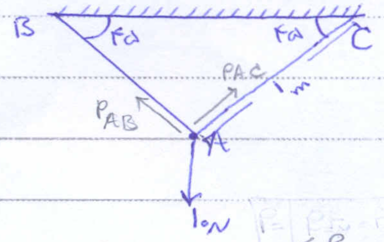
$$\sigma_{BC}=\frac{P_{BC}}{A_{BC}}=\frac{P+nL}{2b\times L}$$

$$\Rightarrow \sigma_{AB}=\sigma_{BC} = \frac{P}{bL}=\frac{P+nL}{2bL}$$

$$\Rightarrow (P\times 2bL)=(bL\times P+nL)$$

$$\Rightarrow ?$$

۲) تغییر طول میله AC را بیابید. $(EA=20)$


B
C
45
45
P_{AC}
P_{AB}
1m
A
10N

$$\Delta L_{AC}=?$$

$$\Delta L_{AC}=\frac{PL_{(AC)}}{AE}=\_\_\_\_\_$$

برای بدست آوردن مقدار P_{AC} $\Rightarrow$

$$\Sigma F_x=0$$

$$F_{AC}\sin\cancel{45}-F_{AB}\cos\cancel{45}=0$$

$$F_{AC}=F_{AB}$$

$$\Sigma F_y=0$$

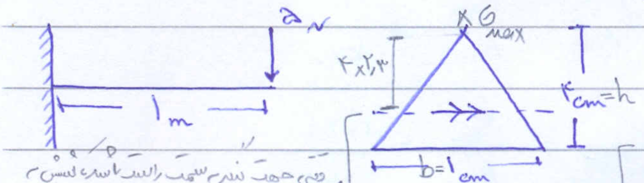
$$2F_{AC}\cos 45-10=0$$

$$F_{AC}=?$$

تمرین ۲ :

- تیرهایی با مقطع مثلثی شکل مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید.

بار $P_۲$ چقدر باشد تا تنش خمشی کششی ماکزیمم در دو تیر مساوی گردد.



وقتی جهت فشردگی سمت راست باشد کشش در سمت بالا است.

①

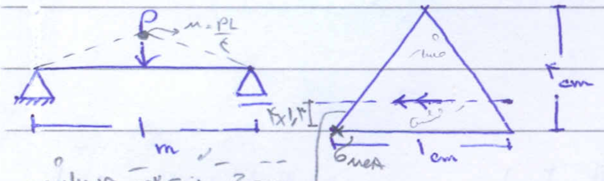
$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$M_{max} = ۵\times۱ = ۵ \ (N/m)$$

$$y = \frac{۲}{۳}h = \frac{۲}{۳}\times۴ = \frac{۸}{۳}\times۱۰^{-۲} \ (m) = \frac{۰٫۰۸}{۳} \ (m)$$

$$I = \frac{bh^۳}{۳۶} = \frac{۰٫۰۱\times(۰٫۰۴)^۳}{۳۶} = ۱٫۷۷\times۱۰^{-۸} \ (m^۴)$$

$$\sigma = \frac{۵\times۰٫۰۸}{۳\times۱٫۷۷\times۱۰^{-۴}} = ۲٫۳۴\times۱۰^{-۹}$$



وقتی جهت فشردگی سمت چپ باشد، کشش هم سمت پایین است.

②

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$M_{max} = \frac{PL}{۴}$$

$$y = \frac{۱}{۳}\times۰٫۰۴ = \frac{۰٫۰۴}{۳} = ۰٫۰۱ \ m$$

$$I = ۱٫۷۷\times۱۰^{-۸} \ (m^۴)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M\times۰٫۰۱}{۱٫۷۷\times۱۰^{-۸}} = ۰٫۵۶\times۱۰^{۴} \ (N.M)$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_۲ = \sigma_۱ \Rightarrow ۵۶\times۱۰^{۴} M = ۲٫۳۴\times۱۰^{-۹}$$

$$M = \frac{۲٫۳۴\times۱۰^{-۹}}{۵۶\times۱۰^{۴}} = ۰٫۰۴۲\times۱۰^{-۳}$$

* نکته: اگر تیری در دو سر مفصل باشد مقدار تنش ماکزیمم آن $M_{max} = \frac{PL}{۴}$ می‌باشد. در صورتی که بار متمرکز وسط دهانه وارد شود.

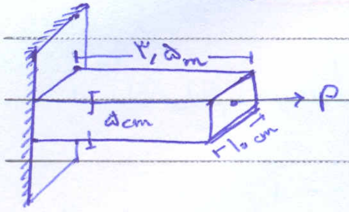
$$\Rightarrow M_{max} = \frac{PL}{۴} \Rightarrow ۰٫۰۴۲\times۱۰^{-۳} = \frac{P\times۱}{۴} = ۴\times۰٫۰۴۲\times۱۰^{-۱۳}$$

$$P = ۰٫۱۶۸\times۱۰^{-۱۳} \ (N.M)$$

میان ترم: (جلسه دهم)

۱- در مقطع مقابل که تحت بار کششی قرار دارد، در صورتی که حداکثر تنش مجاز ۲۴۰_{mpa} و حداکثر تغییر طول مجاز $۳_{(mm)}$ باشد، حداکثر نیروی مجاز P چقدر است؟ (مقطع مستطیل $۱۰×۵_{(cm)}$)

$E = ۲۰۰×۱۰^{۳}_{(mpa)}$



روش حل مسئله:

- برای حل سؤال از دو رابطه استفاده می‌کنیم، زیرا در صورت سؤال ۲ معیار قرار داده‌اند. ① حداکثر تنش مجاز. بنابراین $P=σA$ نیرویی که مقطع را به حداکثر تنش مجاز می‌رساند. ② تغییر طول مجاز از رابطهٔ $ΔL=\frac{PL}{EA}$ تغییر را لحاظ می‌کنیم.

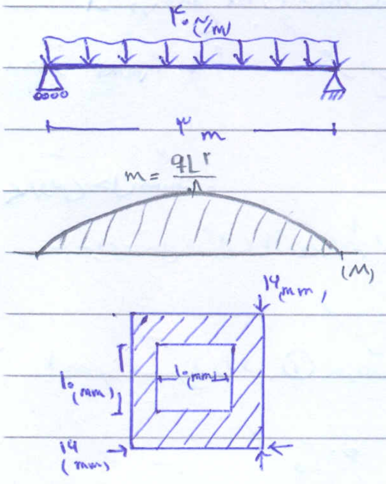
پس از دو نیروی بدست آمده از فرمول تغییر طول و فرمول تنش مجاز، نیروی کمتر را به عنوان حداکثر نیروی مجاز برای مقطع در نظر می‌گیریم. در این فرمول و فرمول‌های مشابه، توجه داشته باشید که واحد تنش و مدول الاستیسیته برحسب (Mpa) باشد می‌توان آن را برحسب Mpa در نظر گرفت و در این صورت ابعاد برحسب (mm) لحاظ می‌شود.

① $P=σA \rightarrow ۲۴۰_{(mpa)} × (۱۰۰×۵۰)_{(mm)} = ۱۲۰۰۰۰۰۰_{(N)} \rightarrow ۱۲۰۰\ kN$

② $ΔL=\frac{PL}{EA} \rightarrow ۳ = \frac{P×۳۵۰۰_{(mm)}}{۲۰۰×۱۰^{۳}×۵۰۰۰_{(mm)}} \rightarrow P = ۸۵۷۱۴۲,۸_{(N)} \rightarrow ۸۵۷,۱۴_{(kN)}$

نیروی مجاز مقطع $\rightarrow \min(۱۲۰۰_{(kN)}, ۸۵۷,۱۴_{(kN)}) = ۸۵۷,۱۴_{(kN)}$

۲- تیر زیر تحت بارگسترده یکنواخت (N/m) ۴۰ قرار دارد. حداکثر تنش خمشی ایجاد شده در این تیر دو سر مفصل چقدر است؟



روش حل مسئله:

- در صورت سؤال حداکثر تنش خمشی را می‌خواهد، از فرمول $\frac{My}{I} = \sigma$ استفاده می‌کنیم، چون از آن جایی که حداکثر تنش خمشی را خواسته،

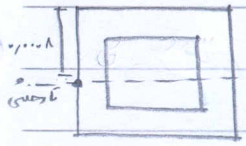
(y) همان دورترین مقطع تا خنثی می‌باشد، (I) ممان اینرسی کل جسم،

و (M) همان گشتاور است. برای بدست آوردن گشتاور در این سؤال‌ها یا مقدار

گشتاور را صورت سؤال می‌دهد، یا به جای آن نحوه‌ی بارگذاری در تیر را می‌دهد، از آن جایی که در این سؤال نحوه‌ی بارگذاری

را داده شده است، باید دیاگرام گشتاور رسم کنیم و Max مقدار آن را به عنوان گشتاور در فرمول تنش قرار دهیم.

$$* \; M = \frac{qL^2}{8} = \frac{40 \times 3^2}{8} = 45 \; (N/m)$$

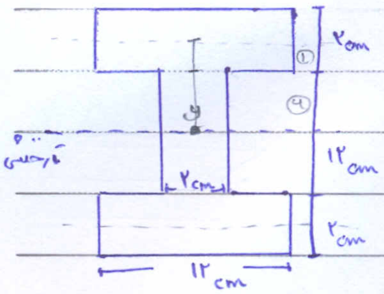


$$* \left[\begin{array}{l} mm \xrightarrow{\times 10^{-3}} m \\ mm^4 \xrightarrow{\times 10^{-3}} m^{-12} \end{array} \right]$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \rightsquigarrow \frac{14^4}{12} - \frac{10^4}{12} = 4928 \; (mm^4) \rightarrow 4928 \times 10^{-12} \; (m^4)$$

۳ـ اگر مقطع مقابل تحت نیروی برشی (kg) ۳۰۰۰۰ باشد، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در آن را بیابید. $(\frac{kg}{cm^2})$

$I = ۱۹۴۰ \ (cm^۴)$



* روش حل مسئله:

ـ در صورت سؤال حداکثر تنش برشی را خواسته، برای حل آن

باید از فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کنیم. در این نوع سؤال ها اگر ابتدا ای

زمانی باید حداکثر تنش آن را بدست آوریم در صورت سؤال که محور الف یا

حداکثر مقدار تنش برشی را می خواهد، در این صورت باید از تار خنثی به بعد برش بزنیم (یعنی محور حداکثر تنش برشی روی

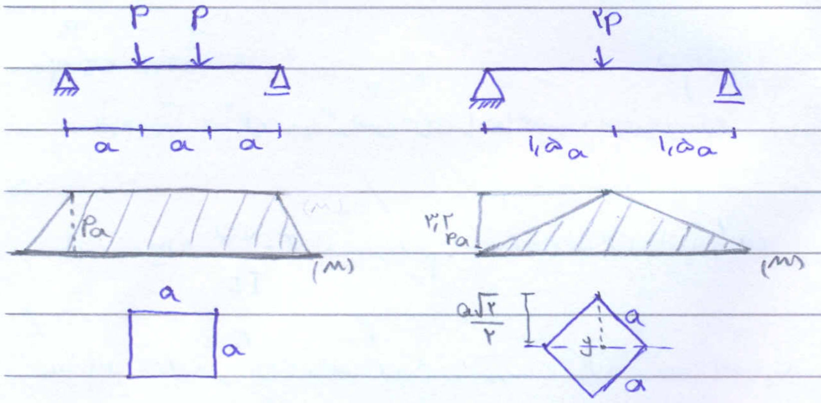
تار خنثی قرار دارد). برای V اگر در صورت سؤال این مقدار را می دهد با عنوان نیروی برشی ما باید مقدار را بدانیم.

$$Q = A\bar{y} \rightarrow (\overset{۱۶۸}{\cancel{۱۲ \times ۲ \times ۷}}) + (\overset{۳۶}{\cancel{۲ \times ۶ \times ۳}}) = ۲۰۴$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow \frac{۳۰۰۰۰ \times ۲۰۴}{۱۹۴۰ \times ۲} = ۹۴۰۹,۲۷ \ (N/cm^۴)$$

Subject .　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date

مثال) تیرهای الف و ب با مقاطع مشخص از شکل زیر موجود است. نسبت تنش max (خمشی) تیر الف به تیر ب چقدر است؟

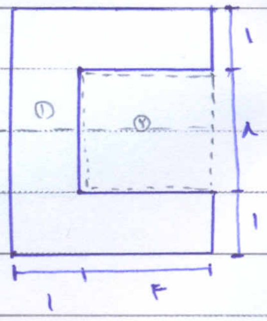


① $\sigma = \dfrac{My}{I} \rightarrow \dfrac{Pa \times a/2}{a^4/12} = \sigma①$

② $\sigma = \dfrac{My}{I} \rightarrow \dfrac{\frac{3}{2} Pa \times \frac{\sqrt{2}}{2} a}{\frac{a^4}{12}} = \sigma②$

* نکته: در مقاطعی که بیش از ۲ محور تقارن دارند، مقاطع منتظم، همه‌ی محورهای عبوری از مرکز سطح به عنوان محور اصلی بوده، ممان اینرسی حول همه‌ی آن‌ها هم برابر است، مانند مقاطع مربع، دایره و .... در مقطع مربع ممان اینرسی حول محورهای تقارن با هم برابر است، بنابراین در لوزی و مربع I، ممان دوم برابر ← $I = \dfrac{a^4}{12}$ است.

مثال ۵: در شکل زیر حداکثر مقدار تنش برشی را بدست آورید. $V = ۳۰۰۰ \,(N)$



$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau = \frac{۳۰۰۰ \times ۴۳۲}{۳۲۹ \times ۱} = ۳۹۳۹{,}۲ \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

$Q = A\bar{y}$ *

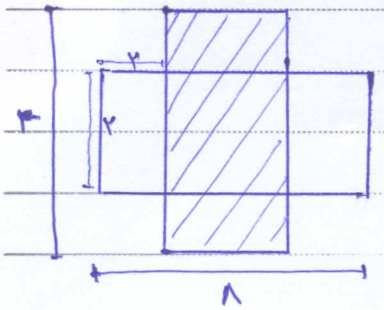
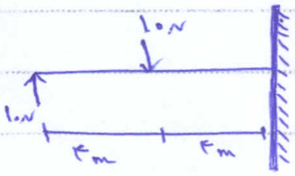
؟؟؟ $= \overset{۱۶}{\cancel{۲\times۴}}\times۲ + (\overset{۲۷}{\cancel{۶\times۱}}\times۴{,}۵)$

$= ۴۳۲$

$I = I_۲ - I_۱$

$I = \frac{bh^۳}{۱۲}$

$= \frac{۶\times۱۰^۳}{۱۲} - \frac{۴\times۸^۳}{۱۲} = ۳۲۹$

تمرین: حداکثر مقدار تنش برشی در جسم شکل زیر را بدست آورید.